(g, F) −MANIFOLDS AND THEIR SUBMANIFOLDS

(g,F) - VARIETĂȚI ȘI SUBVARIETĂȚILE LOR

Chiriac Novac-Claudiu,

***"Constantin Brâncuși"* University of Tg-Jiu**

ABSTRACT. WE INTRODUCE (g, F) −MANIFOLDS AND INITIATE A STUDY OF THEIR SEMI-INVARIANT SUBMANIFOLDS. THESE SUBMANIFOLDS ARE GENERALIZATIONS OF CR-SUBMANIFOLDS OF KAEHLER MANIFOLDS.

KEY WORDS: SEMI-INVARIANT SUBMANIFOLD, CR-SUBMANIFOLD, (g, F) −MANIFOLD

1. Preliminaries

Let M be an m −dimensional Riemannian manifold with Riemannian metric g. Denote by $F(M)$ the algebra of smooth functions on M and by $\Gamma(TM)$ the $F(M)$ −module of smooth sections of the tangent bundle TM of M. We use the same notation for any other vector bundle over M. All manifolds and mappings are supposed to be differentiable of class C^∞.

Next, we consider an n −dimensional submanifold N of M. Then the main objects induced by the Levi-Civita connection $\widetilde{\nabla}$ of (M, g) on N are involved in the well known Gauss-Weingarten equations:

$$(a)\ \widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\ and\ (b)\ \widetilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^\perp_X V, \qquad (1)$$

for any $X, Y \in \Gamma(TN)$ and $V \in \Gamma(TN^\perp)$. Here, ∇ is the Levi-Civita connection on N, h is the second fundamental form of N, A_V is the Weingarten operator with respect to the normal section V and $\nabla^\perp$ is the normal connection in the normal bundle $TN^\perp$ of N. The two geometric objects h and A_V are related by

$$g(h(X, Y), V) = g(A_V X, Y). \qquad (2)$$

If h vanishes identically on N, then N is called totally geodesic.

1. Preliminarii

Fie M o varietate riemanniană m −dimensională cu metrica riemanniană g. Notăm cu $F(M)$ algebra funcțiilor netede pe M și cu $\Gamma(TM)$, $F(M)$ −modulul secțiunilor netede ale fibratului tangent TM la M. Folosim aceea¸si notație pentru orice alt fibrat peste M. Toate varietățile și funcțiile sunt presupuse a fi diferențiabile de clasă C^∞.

Fie N o subvarietate n −dimensională a lui M. Principalele obiecte induse de conexiunea Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ a lui (M, g) pe N sunt incluse în binecunoscutele ecuații Gauss-Weingarten:

$$(a)\ \widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\ și\ (b)\ \widetilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^\perp_X V, \qquad (1)$$

Pentru orice $X, Y \in \Gamma(TN)$ și $V \in \Gamma(TN^\perp)$. Aici, ∇ este conexiunea Levi-Civita pe N, h este a doua formă fundamentală a lui N, A_V este operatorul Weingarten în raport cu secțiunea normală V iar $\nabla^\perp$ este conexiunea normală în fibratul normal $TN^\perp$ a lui N. Cele două obiecte geometrice h și A_V sunt legate prin relația

$$g(h(X, Y), V) = g(A_V X, Y). \qquad (2)$$

Dacă h se anulează identic pe N, atunci se spune că N este total geodesică.

Au fost dezvoltate mai multe studii ale subvarietăților unor varietăți dotate cu structuri

Several studies have been developed on submanifolds of manifolds endowed with some geometrical structures. We recall here some of these structures. First, we consider an almost Hermitian manifold (M, g, J), where g is a Riemannian metric, J is an almost complex structure, that is, $J^2 = -I$, satisfying (cf. Yano-Kon [10], p.124).

$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \forall\ X, Y \in \Gamma(TM)$. (3)

In 1978, Bejancu [2] has introduced the concept of CR-submanifold of an almost Hermitian manifold as follows. A real submanifold N of (M, g, J) is called a CR-submanifold (Cauchy-Riemann submanifold) if it is endowed with a distribution D satisfying the following conditions:

(i) D is invariant with respect to J, that is,

$J(D_x) = D_x, \quad \forall\ x \in N$.

(ii) The complementary orthogonal distribution $D^\perp$ to D in TM is anti-invariant with respect to J, that is,

$J(D_x^\perp) \subset T_x N^\perp, \quad \forall\ x \in N$.

When $D^\perp = \{0\}$ (resp. $D = \{0\}$), N is called invariant submanifold (resp. anti-invariant submanifold). Any real hypersurface of (M, g, J) is a CR-submanifold which is neither invariant nor anti-invariant submanifold.

Next, we consider a manifold M equipped with a semi-Riemannian metric g (cf. O'Neill [8], p.54) and an almost product structure , that is $P^2 = I$, $(P \neq \pm I)$. Then (M, g, P) is called an almost parahermitian manifold if we have

$g(PX, PY) = -g(X, Y)$,

$\forall\ X, Y \in \Gamma(TM)$. (4)

The concept of CR-submanifold has been considered by Bejan [1] in case the ambient manifold is an almost parahermitian manifold. Both, the almost Hermitian and almost parahermitian manifolds are necessarily of even dimension. The odd dimensional coanterparts of these manifolds can be introduced as follows.

Let M be a real $(2m + 1)-$dimensional manifold endowed with a Riemannian metric g, a tensor field φ of type $(1,1)$, a vector field ξ and a $1-$form η satisfying the conditions

(a) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$,

(b) $\eta(\xi) = 1$, (5)

(c) $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$.

Then $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ is called an almost contact metric manifold (cf. Blair [5], p.33). The concept of semi-invariant submanifold of an almost contact metric manifold (cf. Bejancu-Papaghiuc [4]) represents an extension of the concept of CR-

geometrice. Reamintim aici câteva dintre aceste structuri. Mai întâi, considerăm o varietate aproape hermitiană (M, g, J), unde g este o metrică riemanniană, J este o structură aproape complexă, adică $J^2 = -I$, care satisface (cf. Yano-Kon [10], p.124).

$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \forall\ X, Y \in \Gamma(TM)$. (3)

În 1978, A. Bejancu [2] a introdus conceptul de $CR-$subvarietate a unei varietăți aproape hermitiene, după cum urmează. O subvarietate reală N a lui (M, g, J) este numită $CR-$ subvarietate (Cauchy-Riemann subvarietate) dacă este dotată cu o distribuție D care satisface următoarele condiții:

(i) D este invariantă în raport cu J, adică

$J(D_x) = D_x, \quad \forall\ x \in N$.

(ii) Distribuția $D^\perp$ complementar ortogonală lui D în TM este anti-invariantă în raport cu J, adică

$J(D_x^\perp) \subset T_x N^\perp, \quad \forall\ x \in N$.

Când $D^\perp = \{0\}$ (respectiv $D = \{0\}$), N este numită *subvarietate invariantă* (respectiv subvarietate anti-*invariantă*). Orice hipersuprafață reală a lui(M, g, J) este o $CR-$ subvarietate care nu este nici subvarietate invariantă nici anti-invariantă. Să considerăm în continuare o varietate M echipată cu o metrică semi-riemanniană g (cf. O'Neill [8], p.54) ¸si o structură aproape produs P, adică $P^2 = I$, $(P \neq \pm I)$. Atunci tripletul (M, g, P) este numit varietate aproape para-*hermitiană* dacă avem

$g(PX, PY) = -g(X, Y)$,

$\forall\ X, Y \in \Gamma(TM)$. (4)

Conceptul de $CR-$subvarietate a fost considerat de C.L. Bejan [1] în cazul când varietatea ambientală este aproape para-hermitiană. Ambele varietăți, cea aproape hermitiană cât și cea aproape para-hermitiană sunt în mod necesar de dimensione pară. Versiunile de dimensiune impară ale acestor varietăți pot fi introduse după cum urmează. Fie M o varietate reală $(2m + 1)-$dimensională dotată cu o metrică riemanniană g, un câmp tensorial φ de tip $(1,1)$, un câmp vectorial ξ și o $1-$formă η care satisfice condițiile

(a) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$,

(b) $\eta(\xi) = 1$, (5)

(c) $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$.

Atunci $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ se numește varietate aproape de contact *metrică* (cf. Blair [5], p.33). Conceptul de subvarietate semi-invariantă a unei varietăți aproape de contact metrice (cf. Bejancu-Papaghiuc [4]) reprezintă o extensie a conceptului

submanifold to the case of odd dimensional ambient manifold. Similarly, consider a $(2m+1)-$dimensional manifold M endowed with (g,φ,ξ,η) satisfying:
$(a)\ \varphi^2 = I - \eta\otimes\xi,$
$(b)\ \eta(\xi) = \varepsilon,$ (6)
$(c)\ g(\varphi X,\varphi Y) = -g(X,Y) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y).$
where $\varepsilon = +1$ or $\varepsilon = -1$, according as ξ is spacelike or timelike vector field with respect to the semi-Riemannian metric g. Then (M,g,φ,ξ,η) is called an almost paracontact metric manifold (cf. Sato [9]). Semi-invariant submanifolds of almost paracontact manifolds (cf. Ianu¸s-Mihai [7]) are extensions of CR-submanifolds to this class of odd dimensional manifolds.

Finally, we recall that a real $2m-$dimensional manifold M is called an almost symplectic manifold if it is endowed with a nondegenerate $2-$form Ω.

2. Semi-invariant submanifolds of $(g,F)-$manifolds

Let M be a real $m-$dimensional manifold and g be a semi-Riemannian metric on M. Thus g might be a Riemannian metric or nondegenerate of constant index at any point of M. Suppose that there exists on M a non zero tensor field F of type (1,1) satisfying
$g(FX,Y) + g(X,FY) = 0,$
$\forall\ X,Y \in \Gamma(TM).$ (7)
Then we say that M is a $(g,F)-$manifold. If in particular, F_x is nondegenerate at any point $x\in M$ then we say that M is a nondegenerate $(g,F)-$manifold. Otherwise, M is called degenerate $(g,F)-$manifold.

In literature there is an abundance of examples of $(g,F)-$manifolds. Some of these examples are presented here.

Example 1. An almost Hermitian manifold (M,g,J) is a nondegenerate $(g,F)-$manifold. Indeed, take $F = J$ and from (3) we deduce (7). ∎

Example 2. An almost parahermitian manifold (M,g,P) is a nondegenerate $(g,F)-$manifold. In this case we take $F = P$ and by using (4) and taking into account that $P^2 = I$ we obtain (7). ∎

Example 3. An almost contact metric manifold (M,g,φ,ξ,η) is a degenerate $(g,F)-$manifold.

de $CR-$subvarietate la cazul varietăților ambientale de dimensiune impară. În mod similar, să considerăm o varietate $(2m+1)-$dimensională M dotată cu (g,φ,ξ,η) care satisface condițiile:
$(a)\ \varphi^2 = I - \eta\otimes\xi,$
$(b)\ \eta(\xi) = \varepsilon,$ (6)
$(c)\ g(\varphi X,\varphi Y) = -g(X,Y) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y).$
unde $\varepsilon = +1$ sau $\varepsilon = -1$, după cum ξ este un câmp vectorial de tip spatial sau temporal în raport cu metrica semi-riemanniană g. Atunci (M,g,φ,ξ,η) este numit varietate aproape de *paracontact metrică* (cf. Sato [9]). Subvarietățile semi-invariante ale unei varietăți de aproape paracontact (cf. Ianu¸s-Mihai [7]) sunt extensii ale $CR-$subvarietăților la această clasă de varietăți impar dimensionale.

În sfârșit, reamintim că o varietate reală M de dimensiune $2m$ este numită varietate aproape simplectică dacă este dotată cu o $2-$formă nedegenerată Ω.

2. Subvarietăți semi-invariante ale $(g,F)-$varietăților

Fie M o varietate reală $m-$dimensională și g o metrică semi-riemanniană pe M. Metrica g poate fi riemanniană sau nedegenerată de index constant înfiecare punct al lui M. Să presupunem că pe M există un câmp tensorial nenul F de tip (1,1) care satisface
$g(FX,Y) + g(X,FY) = 0,$
$\forall\ X,Y \in \Gamma(TM).$ (7)
Vom spune atunci că M este o $(g,F)-$varietate. Dacă în particular, F_x este nedegenerată în fiecare punct $x\in M$ atunci vom spune că M este o $(g,F)-$*varietate nedegenerată*. În caz contrar, M este numită $(g,F)-$ *varietate degenerată*.
Literatura de specialitate abundă în exemple de $(g,F)-$varietăți. Câteva dintre aceste exemple sunt prezentate și aici.

Exemplul 1. O varietate aproape hermitiană (M,g,J) este o $(g,F)-$varietate nedegenerată. Într-adevăr, dacă luăm $F = J$ din relația (3) deducem (7). ∎

Exemplul 2. O varietate aproape para-hermitiană (M,g,P) este o $(g,F)-$ varietate nedegenerată. În acest caz luăm $F = P$ folosim (4) și ținând cont că $P^2 = I$ obținem (7). ∎

Exemplul 3. O varietate aproape de contact metrică (M,g,φ,ξ,η) este o $(g,F)-$ varietate degenerată. Punem $F = \varphi$ și folosind (5) deducem

We put $F = \varphi$ and by using (5) we deduce (7). As $\varphi(\xi) = 0$, M is a degenerate (g, F) −manifold. ■

Example 4. An almost paracontact manifold $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ is a degenerate (g, F) −manifold. Here we take $F = \varphi$ and by (6) we obtain (7). As in the previous example we have $\varphi(\xi) = 0$, and therefore M is a degenerate (g, F) −manifold. ■

Example 5. Let (M, Ω) be an almost symplectic manifold endowed with a semi-Riemannian metric g. Then we define a tensor field F of type (1,1) by
$g(FX, Y) = \Omega(X, Y)$,
$\forall\ X, Y \in \Gamma(TM)$. (8)
As Ω is skew-symmetric, we deduce that F and g satisfy (7). Moreover, since Ω is nondegenerate we conclude that (M, Ω, g) is a nondegenerate (g, F) −manifold. ■

Remark 1. Any $2m$ −dimensional nondegenerate (g, F) −manifold is an almost symplectic manifold. Indeed, define Ω by (8) and by using (7) we deduce that Ω is a nondegenerate 2 −form on M. ■

Next, we consider a submanifold N of a (g, F) −manifold M. Suppose that g induces a semi-Riemannian metric on N which we denote by the same symbol g. Then, following the definition given by Bejancu [2] for CR-submanifolds we introduce a special class of submanifolds of M as follows.

Definition 1. We say that N is a semi-invariant submanifold of the (g, F) −manifold M if there exists a distribution D on M satisfying the conditions:
(i) D is a nondegenerate distribution with respect to g, and we have
$F(D_x) \subset D_x, \quad \forall\, x \in N$,
that is, D is F −invariant.
(ii) The complementary orthogonal distribution $D^\perp$ to D in TN is F −anti-invariant, that is,
$F(D_x^\perp) \subset T_xN^\perp, \quad \forall\, x \in N$.
(iii) $F^2(D^\perp)$ is a distribution on N.

If in particular, M is an almost Hermitian manifold, then we obtain the concept of CR-submanifold. In this case, the condition (iii) is a consequence of (i) and (ii). Moreover, the above concept of semi-invariant submanifold is a generalization of all the extensions of the concept of CR-submanifold to almost parahermitian manifolds, almost contact metric manifolds, almost

(7). Deoarece $\varphi(\xi) = 0$, M este o (g, F) − varietate degenerată. ■

Exemplul 4. O varietate aproape de paracontact $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ este o (g, F) − varietate degenerată. Aici luăm $F = \varphi$ și cu (6) obținem (7). Ca și în exemplul precedent, avem $\varphi(\xi) = 0$, astfel că M este o (g, F) − varietate degenerată. ■

Exemplul 5. Fie (M, Ω) o varietate aproape simplectică dotată cu o metrică semi-riemanniană g. Definim un câmp tensorial F de tip (1,1) prin
$g(FX, Y) = \Omega(X, Y)$,
$\forall\ X, Y \in \Gamma(TM)$. (8)
Deoarece Ω este anti-simetrică, deducem că F și g satisfac (7). Mai mult, deoarece Ω este nedegenerată, putem concluziona că (M, Ω, g) este o (g, F) − varietate nedegenerată. ■

Observația 1. Orice (g, F) −varietate nedegenerată, $2m$ −dimensională, este o varietate aproape simplectică. Într-adevăr, definim Ω prin (8) și folosind (7) deducem că Ω este o 2 −formă nedegenerată pe M. ■

În continuare, vom considera o subvarietate N a unei (g, F) −varietăți M. Presupunem că g induce o metrică semi-riemanniană pe N pe care o vom nota cu același simbol g. Atunci, urmând definiția dată de A. Bejancu [2] pentru CR − subvarietăți, introducem o clasă specială de subvarietăți ale lui M după cum urmează.

Definiția 1. *Spunem că N* este o subvarietate semi-*invariantă a (g, F) −varietății M dacă există o distribuție D* pe *M care satisface condițiile:*
(i) *D este o distribuție nedegenerată în raport cu g și avem*
$F(D_x) \subset D_x, \quad \forall\, x \in N$,
adică, D este *F −invariantă.*
(ii) *Distribuția $D^\perp$ complementar ortogonală pe D în TN* este *F −*anti-*invariantă, adică,*
$F(D_x^\perp) \subset T_xN^\perp, \quad \forall\, x \in N$.
(iii) $F^2(D^\perp)$ *este o distribuție pe N.*

Dacă în particular, M este o varietate aproape hermitiană, atunci obținem conceptul de CR −subvarietate. În acest caz, condiția (iii) este o consecință a lui (i) și (ii). Mai mult, conceptul de subvarietate semi-invariantă de mai sus este o generalizare a tuturor extensiilor conceptului de CR −subvarietate la varietăți aproape para-hermitiene, varietăți aproape de contact metrice, varietăți aproape de paracontact metrice, etc. (vezi Bejancu [3]).

paracontact metric manifolds, etc. (see Bejancu [3]).

Some particular classes of semi-invariant submanifolds are defined as follows. Let p and q be the ranks of the distributions D and $D^{\perp}$ respectively. If $q=0$, that is $D^{\perp}=\{0\}$, we say that N is an $F-$invariant submanifold of M. If $p=0$, that is $D=\{0\}$, we call N an $F-$anti-invariant submanifold of M. Thus, N is an $F-$invariant (resp. $F-$anti-invariant) submanifold if and only if

$F(TN)\subset TN \quad (resp.\ F(TN)\subset TN^{\perp})$.

If $pq\neq 0$ then N is called a proper semi-invariant submanifold. Now, we denote by $\widetilde{D}$ the complementary orthogonal vector bundle to $F(D^{\perp})$ in $TN^{\perp}$. If $\widetilde{D}=\{0\}$, then we say that N is a normal $F-$anti-invariant submanifold. Thus N is normal $F-$anti-invariant if and only if $F(D^{\perp})=TM^{\perp}$.

Taking into account the Definition 1 we deduce that the tangent bundle and the normal bundle of a semi-invariant submanifold N have the orthogonal decompositions:

$(a)\ TN=D\oplus D^{\perp}\ \ and$

$(b)\ TN^{\perp}=F(D^{\perp})\oplus\widetilde{D}.$ (9)

Then we denote by P and Q the projection morphisms of TN on D and $D^{\perp}$ respectively, and obtain

$(a)\ X=PX+QX,$

$(b)\ FX=\varphi X+\omega X, \qquad \forall\, X\in\Gamma(TN),$ (10)

where we put

$(a)\ \varphi X=FPX\ \ and$

$(b)\ \omega X=FQX.$ (11)

Thus φ is a tensor field of type $(1,1)$ on N, while ω is a $F(D^{\perp})-$valued vector $1-$form on N.

Next, we prove the following.

Proposition 1. Let N be a semi-invariant submanifold of a $(g,F)-$manifold M. Then we have the following assertions:

(i) N is a $(g,\varphi)-$manifold.

(ii) $F^2(D^{\perp})$ is a vector subbundle of $D^{\perp}$.

(iii) The vector bundle $\widetilde{D}$ is $F-$invariant, that is, we have

$F(\widetilde{D}_x)\subset\widetilde{D}_x\,, \quad \forall\, x\in N.$

Proof. (i) By definition, g is a semi-Riemannian metric on N and φ is a tensor field of type $(1,1)$ on N, we need only to show (7). By using $(11a)$, $(10a)$ and (7) for F we obtain

$$g(\varphi X,Y)=g(FPX,Y)=g(FPX,PY)$$
$$=-g(PX,FPY)=$$
$$=-g(X,FPY)=g(X,\varphi Y),$$

$\forall\, X,Y\in\Gamma(TN)$.

Câteva clase particulare de subvarietăți semi-invariante sunt definite după cum urmează. Fie p și q rangurile distribuțiilor D și respectiv $D^{\perp}$. Dacă $q=0$, adică $D^{\perp}=\{0\}$, spunem că N este o subvarietate $F-$*invariantă* a lui M. Dacă $p=0$, adică $D=\{0\}$, spunem că N este o subvarietate $F-$anti-*invariantă* a lui M. Astfel, N este o subvarietate $F-$invariantă (respectiv $F-$anti-invariantă) dacă și numai dacă

$F(TN)\subset TN \quad (respectiv\ F(TN)\subset TN^{\perp})$.

Dacă $pq\neq 0$ atunci N se numește subvarietate proprie semi-*invariantă*. Acum, să notăm cu $\widetilde{D}$ fibratul vectorial complementar ortogonal lui $F(D^{\perp})$ în $TN^{\perp}$. Dacă $\widetilde{D}=\{0\}$, atunci vom spune că N este o subvarietate normal $F-$anti-*invariantă*. Astfel N este normal $F-$anti-invariantă if dacă și numai dacă $F(D^{\perp})=TM^{\perp}$.

Ținând cont de Definiția 1 deducem că fibratul tangent și fibratul normal al unei subvarietăți semi-invariante N au descompunerile ortogonale:

$(a)\ TN=D\oplus D^{\perp}\ \ și$

$(b)\ TN^{\perp}=F(D^{\perp})\oplus\widetilde{D}.$ (9)

Să notăm cu P și Q morfismele de proiecție ale lui TN pe D și respectiv $D^{\perp}$ și obținem

$(a)\ X=PX+QX,$

$(b)\ FX=\varphi X+\omega X, \qquad \forall\, X\in\Gamma(TN),$ (10)

Unde am notat

$(a)\ \varphi X=FPX\ \ și$

$(b)\ \omega X=FQX.$ (11)

Astfel φ este un câmp tensorial de tip $(1,1)$ pe N, în timp ce ω este o $1-$formă vectorială $F(D^{\perp})-$valuată pe N.

În cele ce urmează demonstrăm următoarea afirmație..

Propoziția 1. Fie N o subvarietate semi-*invariantă* a $(g,F)-$*varietății* M*. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

(i) N este o $(g,\varphi)-$varietate.

(ii) $F^2(D^{\perp})$ este un subfibrat vectorial al lui $D^{\perp}$.

(iii) Fibratul vectorial $\widetilde{D}$ este $F-$invariant, that *is, adică avem*

$F(\widetilde{D}_x)\subset\widetilde{D}_x\,, \quad \forall\, x\in N.$

Demonstrație. (i) Prin definiție, g este o metrică semi-riemanniană pe N și φ este un câmp tensorial de tip $(1,1)$ pe N, deci trebuie doar să dovedim (7). Folosind $(11a)$, $(10a)$ și (7) pentru F, obținem

$$g(\varphi X,Y)=g(FPX,Y)=g(FPX,PY)$$
$$=-g(PX,FPY)=$$
$$=-g(X,FPY)=g(X,\varphi Y),$$

$\forall\, X,Y\in\Gamma(TN)$.

Thus (7) is satisfied for g and φ, and therefore N is a (g,φ) −manifold.
(ii) Take $X \in \Gamma(D)$ and $Y \in \Gamma(D^{\perp})$. Then by using (7) we obtain
$g(X, F^2Y) = -g(FX, FY) = 0,$
since $FX \in \Gamma(D)$ and $FY \in \Gamma(TM^{\perp})$. Hence $F^2(D^{\perp})$ is orthogonal to D and by condition (iii) of Definition 1 we deduce that $F^2(D^{\perp})$ is a vector subbundle of $D^{\perp}$.
(iii) Take $\in \Gamma(TN)$, $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ and $V \in \Gamma(\widetilde{D})$. Then by using (7) and $(10b)$ we obtain
$$g(FV, X) = -g(V, FX) = -g(V, \varphi X + \omega X) = 0\,,$$
and
$$g(FV, FY) = -g(V, F^2Y) = 0\,,$$
since $\varphi X \in \Gamma(D)$, $\omega X \in \Gamma(FD^{\perp})$ and $F^2Y \in \Gamma(D^{\perp})$. Thus $F\widetilde{D}$ is orthogonal to $TN \oplus FD^{\perp}$, that is, $F\widetilde{D}$ is a vector subbundle of $\widetilde{D}$. This completes the proof of the proposition. ∎

Taking into account that F is an automorphism of TM provided M is a non-degenerate (g,F) −manifold, by condition (i) of Definition 1. and by assertions (ii) and (iii) of Proposition 1 we can state the following.

Corollary 1. Let N be a semi-invariant submanifold of a nondegenerate (g,F) −manifold M. Then we have:
$$F(D) = D, \quad F^2(D^{\perp}) = D^{\perp} \quad and\ F(\widetilde{D}) = \widetilde{D}.$$

References

[1] **C.L. Bejan**, CR-Submanifolds of hyperbolic almost Hermitian manifolds, Demonstratio Mathematica, 23, 1990, 335-343.
[2] **A. Bejancu**, CR-Submanifolds of a Kaehler manifold I, Proc. Amer. Math. Soc., 69, 1978, 134-142.
[3] **A. Bejancu**, Geometry of CR-Submanifolds, D. Reidel Publish. Comp., Dordrecht, 1986.
[4] **A. Bejancu**, **N. Papaghiuc**, Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold, An. St. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, 27, 1981, 163-170.
[5] **D.E. Blair**, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Birkhäuser, Basel, 2001.
[6] **D.E. Blair**, **B.Y. Chen**, On CR-submanifolds of Hermitian manifolds, Israel J. Math., 34, 1979, 353-363.
[7] **S. Ianuş**, **I. Mihai**, Semi-invariant submanifolds of almost paracontact manifolds, Tensor N.S., 39, 1982, 195-199.

Astfel (7) este satisfăcută pentru g și φ, și în consecință N este o (g,φ) −varietate.
(ii) Să luăm $X \in \Gamma(D)$ și $Y \in \Gamma(D^{\perp})$. Atunci folosind (7) obținem
$g(X, F^2Y) = -g(FX, FY) = 0,$
deoarece $FX \in \Gamma(D)$ și $FY \in \Gamma(TM^{\perp})$. Deci $F^2(D^{\perp})$ este ortogonal pe D și prin condiția (iii) din Definiția 1 deducem că $F^2(D^{\perp})$ este un subfibrat vectorial al lui $D^{\perp}$.
(iii) Să luăm $\in \Gamma(TN)$, $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ și $V \in \Gamma(\widetilde{D})$. Atunci, folosind (7) și $(10b)$ obținem
$$g(FV, X) = -g(V, FX) = -g(V, \varphi X + \omega X) = 0\,,$$
și
$$g(FV, FY) = -g(V, F^2Y) = 0\,,$$
deparece $\varphi X \in \Gamma(D)$, $\omega X \in \Gamma(FD^{\perp})$ și $F^2Y \in \Gamma(D^{\perp})$. Astfel, rezultă că $F\widetilde{D}$ este ortogonal lui $TN \oplus FD^{\perp}$, adică $F\widetilde{D}$ este un subfibrat vectorial al lui $\widetilde{D}$. Aceasta completează demonstrația propoziției. ∎

Ținând cont că F este un automorfism al lui TM dacă M este o (g,F) −varietate nedegenerată, cu condiția (i) din Definiția 1. și cu afirmațiile (ii) și (iii) din Propoziția 1 putem formula următorul.

Corolar 1. Fie N o subvarietate semi-*invariantă a unei* (g,F) *−varietăți nedegenerate* M. Atunci avem:
$$F(D) = D, \quad F^2(D^{\perp}) = D^{\perp} \quad and\ F(\widetilde{D}) = \widetilde{D}.$$

Bibliografie

[1] **C.L. Bejan**, CR-Submanifolds of hyperbolic almost Hermitian manifolds, Demonstratio Mathematica, 23, 1990, 335-343.
[2] **A. Bejancu**, CR-Submanifolds of a Kaehler manifold I, Proc. Amer. Math. Soc., 69, 1978, 134-142.
[3] **A. Bejancu**, Geometry of CR-Submanifolds, D. Reidel Publish. Comp., Dordrecht, 1986.
[4] **A. Bejancu**, **N. Papaghiuc**, Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold, An. St. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, 27, 1981, 163-170.
[5] **D.E. Blair**, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Birkhäuser, Basel, 2001.
[6] **D.E. Blair**, **B.Y. Chen**, On CR-submanifolds of Hermitian manifolds, Israel J. Math., 34, 1979, 353-363.

[8] **B. O'Neill**, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 1983.
[9] **I. Sato**, On a structure similar to the almost contact structure, Tensor, 30, 1976, 219-224.
[10] **K. Yano, M. Kon**, CR-Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds, Birkhäuser, Boston, 1983.
[7] **S. Ianuș**, **I. Mihai**, Semi-invariant submanifolds of almost paracontact manifolds, Tensor N.S., 39, 1982, 195-199.
[8] **B. O'Neill**, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 1983.
[9] **I. Sato**, On a structure similar to the almost contact structure, Tensor, 30, 1976, 219-224.
[10] **K. Yano, M. Kon**, CR-Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds, Birkhäuser, Boston, 1983.