VELOCITY QUADRIVECTOR

Cuadrivectorul viteză

Chiriac Novac-Claudiu
Universitatea "Constantin Brâncuși" din Tg-Jiu

Abstract. *In this paper we give a definition to relative velocity so that size represents a vector of algebraic terms. We proof that this vector is contravariant in $\mathbb{R}^4$ of time type. As an application will determine the relative velocity of the two observers you know their velocity in relation to third observer.*
Key-words: *relativity theory, relative velocity, velocity vector*

1. Preliminarii

Studiul vitezelor și accelerațiilor este definitoriu pentru cinematică. Pentru cinematica relativistă acest studiu este marcat de o serie de aspecte privind caracterul vectorial al acestor mărimi și clasificarea lor ca vectori.

Pentru început considerăm viteza ca vector tridimensional și ne punem problema de a găsi relațiile ce există între componentele vitezei în două sisteme de referință inerțiale. Să considerăm că față de sistemul Ω, considerat fix, sistemul ω se mișcă cu o viteză $\bar{v}$. Pentru simplificarea formulelor vom considera că triedele de referință $OXYZ$, al lui Ω și $oxyz$ al lui ω au axele OX și ox suprapuse, iar mișcarea lui ω se execută de-a lungul axei OX. Legătura dintre coordonatele (T, X, Y, Z) ale unui eveniment față de reperul Ω și coordonatele (t, x, y, z) ale aceluiași eveniment față de ω sunt date de formulele lui Lorentz (vezi [6])

$$\begin{cases} X = \dfrac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ Y = y \\ Z = z \\ T = \dfrac{t + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad (1)$$

Dacă (X, Y, Z), respectiv (x, y, z) reprezintă coordonatele unui punct M ce se mișcă cu o viteză $\bar{u}$, este clar că acest vector viteză are componentele diferite în cele două repere, și anume, pentru observatorul Ω avem

$$\bar{u} = \left(\frac{dX}{dT}, \frac{dY}{dT}, \frac{dZ}{dT}\right) = (u_X, u_Y, u_Z),$$

iar pentru ω avem

$$\bar{u} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (u_x, u_y, u_z).$$

Derivând primele trei dintre relațiile (1) obținem (în ipoteza că aceste derivate există)

$$\begin{cases} u_X = \dfrac{u_x + v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \dfrac{dt}{dT} \\ u_Y = u_y \cdot \dfrac{dt}{dT} \\ u_Z = u_z \cdot \dfrac{dt}{dT} \end{cases} \qquad (2)$$

iar pentru derivata $\frac{dt}{dT}$, din ultima relație (1) deducem

$$\frac{dt}{dT} = \frac{1 + \frac{v}{c^2} u_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Astfel formulele (2) devin

$$\begin{cases} u_X = \dfrac{u_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_x} \\ u_Y = u_y \dfrac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x} \\ u_Z = u_z \dfrac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x} \end{cases}, \qquad (3)$$

Care rezolvă problema formulată. Pentru inversarea acestor formule se poate proceda prin calcul direct, sau se reia raționamentul pornind de la inversele formulelor (1) și se obțin formulele:

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u_X - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_X} \\ u_y = u_Y \dfrac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_X} \\ u_z = u_Z \dfrac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_X} \end{cases}, \qquad (4)$$

Formulele lui Lorentz au fost stabilite ca transformări ale coordonatelor evenimentelor observate de diferiți referențiali. Este necesar însă să interpretăm transformările Lorentz și ca schimbări ale bazelor algebrice atașate observatorilor inerțiali.

Dacă $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ și $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ sunt baze algebrice ale observatorilor inerțiali ω și $\widetilde{\omega}$ ce au același eveniment origine 0 și aceleași unități pentru spațiu și timp, între elementele acestor baze, considerate ca vectori de poziție ai evenimentelor respective, vor avea loc niște relații de dependență liniară:

$$\begin{cases} \tilde{e}_0 = a_0^0 e_0 + a_0^1 e_1 + a_0^2 e_2 + a_0^3 e_3 \\ \tilde{e}_1 = a_1^0 e_0 + a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + a_1^3 e_3 \\ \tilde{e}_2 = a_2^0 e_0 + a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + a_2^3 e_3 \\ \tilde{e}_3 = a_3^0 e_0 + a_3^1 e_1 + a_3^2 e_2 + a_3^3 e_3 \end{cases} \qquad (5)$$

Transformarea Lorentz înțeleasă ca trecere de la observatorul ω la $\widetilde{\omega}$, sau ca relații între bazele algebrice ale acestor doi observatori, se definește prin matricea

$$T = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_0^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

obținută prin transpunerea tabloului de coeficienți din (5).

Semnificația practică a transformărilor Lorentz ca schimbări de baze algebrice se reduce la o anume corespondență între etaloanele celor doi observatori.

Folosind baza algebrică, fiecare observator inerțial atașează evenimentelor sisteme de patru numere scriind

$$e = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \,. \qquad (7)$$

Identificând evenimentul e cu sistemul de numere $(x^0, x^1, x^2, x^3)^t$, vector coloană, se constată ușor că acest vector din $\mathbb{R}^4$, considerat vector de poziție al evenimentului e este contravariant. Într-adevăr, dacă ω și $\widetilde{\omega}$ sunt doi observatori inerțiali, fiecare găsește pentru evenimentul e o dezvoltare de forma

$$e = x^i e_i \;, \qquad e = \tilde{x}^j \tilde{e}_j \;. \qquad (8)$$

Înlocuind, conform (5), $\tilde{e}_j = a_j^i e_i$, găsim $x^i e_i = \tilde{x}^j a_j^i e_i$, deci $x^i = a_j^i \tilde{x}^j \,, i = 1,2,3$.

Notând cu $b_i^k,\ i,k = 0,1,2,3$ elementele matricei T^{-1}, această ultimă relație se mai scrie în forma echivalentă

$$\tilde{x}^k = b_i^k x^i \,, \quad k = 0,1,2,3 \,, \qquad (9)$$

ceea ce exprimă contravarianța vectorului de poziție al evenimentului e.

2. Cuadrivectorul viteză

Prin termenul cuadrivector, înțelegem un vector, în sensul clasificării algebrice, din spațiul $\mathbb{R}^4$ al evenimentelor. Deoarece problemele se formulează în mod similar în $\mathbb{R}^3$ și chiar $\mathbb{R}^2$, se va vedea că esențial nu este dimensiunea 4 a spațiului liniar $\mathbb{R}^4$, ci modul de comportare a componentelor mărimii considerate în cazu unei schimbări Lorentz a bazei, adică covarianța, respectiv contravarianța acestora.

Formulele (3) și (4) care dau legătura între componentele u_x, u_y, u_z și u_X, u_Y, u_Z ale vitezei (tridimensionale) din două repere inerțiale ω și Ω, sunt în primul rând neliniare, deci această viteză ca mărime fizică în spațiul de evenimente, nu este vector (nici covariant, nici contravariant). Se impune astfel reconsiderarea modului de descriere a vitezei încât această mărime să reprezinte un vector și din punct de vedere algebric.

Se știe că, în spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$, viteza

$$\bar{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

este un vector contravariant ca și vectorul de poziție (x, y, z) al punctului ce execută mișcarea. Să vedem de ce și să încercăm să folosim un procedeu similar pentru a obține un cuadrivector viteză în spațiul de evenimente. Explicația este simplă: timpul și deci și intervalele de timp, sunt mărimi invariante față de transformările Galilei (vezi [8]), iar viteza se obține raportând intervalele spațiale la intervale temporare. Cum în teoria relativității, timpul nu mai este „absolut" este normal ca vectorul viteză din mecanica clasică să nu mai fie vector în mecanica relativistă. Soluția ce se degajă pentru a obține un cuadrivector viteză este de a nu raporta variația coordonatelor spațiale la timpul coordonată, ci de a raporta variația coordonatelor evenimentelor la timpul propriu, care este un invariant al transformărilor Lorentz.

Să considerăm că un observator inerțial ω constată evoluția unei particule P ca o succesiune de evenimente:
$e(t) = \left(x^0 = ct, x^1(t), x^3(t)\right)$.
Presupunem că viteza momentană (tridimensională) este
$\bar{v} = (v^1, v^2, v^3)$, unde $v^i = \frac{dx^i}{dt}$, $i = 1,2,3$.
Fie τ timpul propriu al particulei P, măsurat cu metrica indefinită temporală conform formulei:

$$\Delta\tau = k\left(e(t), e(t+\Delta t)\right) = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = c\Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ , \qquad (10)$$

măsurătoarea începând de la un anume eveniment ales ca origine în evoluția particulei.
Definiție. Numim *cuadrivector viteză* al particulei (în momentul t) mărimea de componente:

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{c\Delta t}{c\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad (11)$$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta x^i}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{v^i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad i = 1,2,3$$

în ipoteza că limitele considerate există. ■
Propoziția următoare justifică denumirea de cuadrivector pentru mărimea de componente u^0, u^1, u^2, u^3 de mai sus.
Propoziție. *Cuadrivectorul viteză, definit prin componentele* (11) *este un vector contravariant în* $\mathbb{R}^4$*, de tip temporal*.
Demonstrație. Am văzut că localizarea evenimentelor se face prin vectori de poziție contravarianți ai căror componente se schimbă conform formulelor (9), deci și diferențele:
$e(t+\Delta t) - e(t) = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$
vor fi vectori contravarianți. Conform formulelor (9) aceste diferențe se raportează la invariantul $\Delta\tau$, ceea ce arată că și componentele cuadrivitezei se schimbă tot conform formulelor (9). Faptul că cuadrivectorul viteză este de tip temporal se vede prin aceea că $u^0 > 0$ și $(u^0)^2 - (u^0)^2 - (u^0)^2 - (u^0)^2 = 1 > 0$. ■
Cuadrivitezele sistemelor inerțiale. Vom scrie un sistem inerțial ca pe o mulțime de evenimente de forma $\omega = \{\lambda(1, \bar{v}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, unde $\bar{v}$ era viteza lui ω față de observatorul Ω, considerat fix, bineînțeles în ipoteza că Ω și ω au același eveniment de origine. Se constată ușor că $(1, \bar{v})$ reprezintă exact cuadrivectorul viteză al observatorului ω față de Ω, sau, mai exact, este coliniar cu acest cuadrivector. Într-adevăr, dacă nu măsurăm timpul în secunde, ci în metri, avem $\omega = \{\lambda(c, \bar{v}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ unde $\bar{v}$ are componentele exprimate tot în m/s ca în formulele (11). Notând

$$\lambda = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} c^{-1}$$

obținem, conform formulelor (11),

$$\omega = \{\mu(u^0, u^1, u^2, u^3) : \mu \in \mathbb{R}\},$$

ceea ce arată că, în cazul sistemelor de referință inerțiale, cuadrivectorul viteză determină evoluția acestora în spațiul de evenimente.

În scriere matriceală, ținând cont de contravarianța cuadrivectorului viteză, acesta are forma unei matrici coloană $u = (u^0, u^1, u^2, u^3)$. Cu această notație putem reprezenta observatorul ω ca pe o mulțime de vectori de poziție ai unor evenimente și anume

$\omega = \{\mu u : \mu \in \mathbb{R}\}$.

3. Viteza relativă a doi observatori

Ca aplicație a proprietății de contravarianță a cuadrivitezei vom stabili formula vitezei relative a doi observatori când se știu vitezele acestora față de al teilea observator (revenind la definiția 4-vitezei și considerând contravarianța ei stabilită).

Să considerăm că față de un observator Ω, considerat fix, observatorii ω_1 și ω_2 se mișcă cu vitezele $\bar{v}_1$ și respectiv $\bar{v}_2$ (tridimensionale). Ne punem problema de a găsi viteza $\bar{v}$ a observatorului ω_2 față de ω_1.

În locul vitezelor $\bar{v}_2$ și $\bar{v}$, cu care ω_2 se mișcă față de Ω, respectiv ω_1, vom considera cuadrivitezele prin care ω_2 se reprezintă ca mulțimi de evenimente pentru cei doi observatori. Astfel, pentru Ω, ω_2 este definit prin cuadriviteza:

$u_2 = \left((1 - v_2^2 c^{-2})^{-1/2}, c^{-1}(1 - v_2^2 c^{-2})^{-1/2}\bar{v}_2\right)$,

iar pentru ω_1, același observator ω_2 este definit prin cuadriviteza

$u = \left((1 - v^2 c^{-2})^{-1/2}, c^{-1}(1 - v^2 c^{-2})^{-1/2}\bar{v}_2\right)$.

Contravarianța cuadrivitezei exprimă faptul că, atunci când trecem de la observatorul Ω la ω_1, cuadriviteza u_2 trece în u, componentele ei schimbându-se exact după formulele de transformare Lorentz în formă vectorială (vezi [7]) unde însă în locul lui $\bar{v}$ apare $-\bar{v}_1$. Astfel, după notația simplificatoare $\alpha_v = (1 - v^2 c^{-2})^{-1/2}$ obținem:

$$\begin{cases} c^{-1}\alpha_v \bar{v} = c^{-1}\alpha_{v_2}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) + \left(\alpha_{v_1} - 1\right) v_1^{-2}\left(< \bar{v}_1, c^{-1}\alpha_{v_2}\bar{v}_2 > - c^{-1}\alpha_{v_2} v_1^2\right)\bar{v}_1 \\ c^{-1}\alpha_v = \alpha_{v_1}\left(c^{-1}\alpha_{v_2} - c^{-2} < \bar{v}_1, c^{-1}\alpha_{v_2}\bar{v}_2 >\right) \end{cases} \quad (12)$$

Înlocuind $c^{-1}\alpha_v$ din a doua formulă în prima și simplificând cu $c^{-1}\alpha_{v_2}$, rezultă

$$\bar{v} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1 + \left(\alpha_{v_1} - 1\right) v_1^{-2}(< \bar{v}_1, \bar{v}_2 > - v_1^2)\bar{v}_1}{\alpha_{v_1}(1 - c^{-2} < \bar{v}_1, \bar{v}_2 >)^2}, \quad (13)$$

care rezolvă problema vitezei relative a celor doi observatori.

BIBLIOGRAFIE

[1] **M. Born**, *Teoria Relativității a lui Einstein*, Ed. Științifică, București, 1979

[2] **T. Bălan**, *Remarks on the topologies for Minkovski space-time,* Annals Univ. din Craiova, Seria IV, Nr. 4(1976), p. 27-29.

[3] **N. Bărbulescu**, *Bazele fizice ale relativității einsteiniene*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1979

[4] **A. Einstein**, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Ann. Phys. **17**, 891–921 (1905). Traducerea în lb. engleză a acestui articol (On the Electrodynamics of Moving Bodies). http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/specrel.pdf
[5] **A. Einstein**, *Teoria Relativității*, Ed. Tehnică, București, 1957.
[6] **V. Faraoni**, *Special Relativity*, Springer International Publishing, 2013.
[7] **D.M. Gitman, I. Tyutin, J.L. Assirati, M.G. Da Costa**, *Structure of the Lorentz transformation of general form*, Gravitation & Cosmology, vol. 4(1998), Nr. 2(14), p. 163-166.
[8] **Gh. Munteanu, V. Bălan**, *Lecții de Teoria Relativității*, Ed. BREN, București, 2000.