Integrability of distributions on a semi-invariant submanifold of a paraquaternionic Kähler manifold

Integrabilitatea distribuțiilor pe o subvarietate normal anti-invariantă a unei varietăți para-cuaternionice Kähler

Chiriac Novac-Claudiu
***Universitatea "Constantin Brâncuși" din Tg*-Jiu**

Abstract. In the present papper we obtain necessary and suficient condition for the integrability of complementary orthogonal distribution on a semi-invarioant submanifold of a paraquaternionic Kähler manifold.

Key words : distributions, anti-invariant submanifold, Kähler manifolds

1. Introducere

Fie N o subvarietate normal anti-invariantă de codimensiune n a unei varietăți $4m$ −dimensionale para-cuaternionice Kähler $(M, \mathbb{V}, g)$ și fie $\mathcal{D}$ și $\mathcal{D}^{\perp}$ distribuții complementar ortogonale pe N. Atunci conform definițiilor lui $\mathcal{D}$ și $\mathcal{D}^{\perp}$ are loc local descompunerea ortogonală

$$TN = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp} \qquad (1)$$

Să considerăm un câmp local de repere ortonormale $\{\boldsymbol{U_1}, \dots, U_n\}$ ale fibratului normal $TN^{\perp}$, și să definim

$$E_{ai} := J_a U_i, \quad a \in \{1, 2, 3\}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}. \qquad (2)$$

Din definiția anterioară rezultă că $\{E_{ai}\}$, $a \in \{1, 2, 3\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, este un câmp local de repere ortonormale ale lui $\mathcal{D}^{\perp}$. Astfel putem pune

$$X = PX + \sum_{b=1}^{3} \sum_{i=1}^{n} \omega_{bi}(X) E_{bi}\,, \ \ \forall\, X \in \Gamma(TN^{\perp})\,, \qquad (3)$$

unde P este morfismul de proiecție a lui TN pe $\mathcal{D}$ în raport cu descompunerea (1), iar ω_{bi} sunt 1 −forme diferențiale date de

$$\omega_{bi}(X) := \varepsilon_{bi} g(X, E_{bi})\,, \qquad \varepsilon_{bi} = g(E_{bi}, E_{bi}). \qquad (4)$$

Acum, aplicăm J_a, $a \in \{1, 2, 3\}$, lui (3) și folosind (2) obținem

$$(a)\ J_1 X = \ J_1 PX + \sum_{i=1}^{n} \{\omega_{2i}(X) E_{3i} + \omega_{3i}(X) E_{2i} + \omega_{1i}(X) U_i\}\,,$$

$$(b)\ J_1 X = \ J_1 PX - \sum_{i=1}^{n} \{\omega_{1i}(X) E_{3i} + \omega_{3i}(X) E_{1i} - \omega_{2i}(X) U_i\}, \qquad (5)$$

$$(c)\ J_1X = J_1PX + \sum_{i=1}^{n}\{\omega_{1i}(X)E_{2i} - \omega_{2i}(X)E_{1i} + \omega_{3i}(X)U_i\}.$$

În continuare, considerăm ecuația lui Gauss (vezi B.Y. Chen [3]).

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \qquad \forall\, X, Y \in \Gamma(TN), \qquad (6)$$

unde $\widetilde{\nabla}$ și ∇ sunt conexiunile Levi-Civita pe (M,g) și respective pe (N,g), iar h este a doua formă fundamental a lui N. De asemenea are loc ecuația lui Weingarten

$$\widetilde{\nabla}_X U = -A_U X + \nabla_X^{\perp} U\,, \qquad \forall\, X \in \Gamma(TN), U \in \Gamma(TN^{\perp}), \qquad (7)$$

unde A_U este operatorul formă al lui N în raport cu secțiunea normală U, iar $\nabla^{\perp}$ este conexiunea normală pe $TN^{\perp}$. Mai mult h și A_U sunt legate prin relația

$$g(h(X,Y),U) = g(A_U X, Y), \quad \forall X,Y \in \Gamma(TN), U \in \Gamma(TN^{\perp}). \qquad (8)$$

Propoziția 1. Fie N o subvarietate normal anti-*invariantă de codimensiune* n *a unei varietăți* para-*cuaternionice Kähler* $(M, \mathbb{V}, g)$. Atunci avem

$$h(X, J_a Y) = \lambda_a \sum_{i=1}^{n}\{\omega_{ai}(\nabla_X Y)U_i\}, \qquad (9)$$

pentru orice $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ *și* $a \in \{1,2,3\}$.

Demonstrație. Prin calcule directe, folosind (6) și $(5a)$ deducem că

$$\nabla_X J_1 Y + h(X, J_1 Y) = J_1 P(\nabla_X Y) + \textstyle\sum_{i=1}^{n}\{\omega_{2i}(\nabla_X Y)E_{3i} + \omega_{3i}(\nabla_X Y)E_{2i} + \omega_{1i}(\nabla_X Y)U_i\} +$$
$$+ J_1 h(X,Y) + \boldsymbol{q}(X)J_2Y - \boldsymbol{r}(X)J_3Y\,.$$

Luând componentele normale în ecuația de mai sus obținem (9) pentru $a = 1$. În mod similar rezultă (9) pentru $a = 2$ și $a = 3$. ■

Definiția 1. *Spunem că* N este $\mathcal{D}$ *−geodezică dacă a doua sa formă fundamental* h satisface *condiția* (vezi A. Bejancu [1])

$$h(X,Y) = 0, \qquad \forall X,Y \in \Gamma(\mathcal{D}). \qquad (10)$$

Atunci folosind (6) și (10) deducem că N este $\mathcal{D}$ −geodezică dacă și numai dacă orice geodezică a lui (N,g) care trece prin fiecare $x \in N$ și este tangent la $\mathcal{D}_x$ este o geodezică a lui (M,g).

2. Integrabilitatea distribuțiilor pe o subvarietate normal anti-invariantă

Teorema 1. Fie N o subvarietate normal anti-*invariantă a varietății para-cuaternionice Kähler* $(M, \mathbb{V}, g)$. *Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) *Cea de a doua formă fundamentală* h a lui N *satisfice relațiile*

$$h(X, J_a Y) = h(Y, J_a X),\ \forall X,Y \in \Gamma(\mathcal{D}), a \in \{1,2,3\}. \qquad (11)$$

(ii) N este $\mathcal{D}$ *−geodezică.*

(iii) *Distribuția para-cuaternionică* $\mathcal{D}$ *este integrabilă*.

Demonstrație. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Folosind (11) deducem că

$$h(J_3X, Y) = h(X, J_3Y) = h\big(X, J_1(J_2Y)\big) = h(J_1X, J_2Y) =$$
$$= h(J_2(J_1X), Y) = -h(J_3X, Y), \qquad \forall X,Y \in \Gamma(\mathcal{D}),$$

Care implică $h(J_3X, Y) = 0$. Ținând cont că J_3 este un automorfism al lui $\Gamma(\mathcal{D})$ obținem (10). Deci N este $\mathcal{D}$ −geodezică.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Folosind (10) și (4) în (9) deducem că

$g(\nabla_X Y, E_{ai}) = 0\,,\quad \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}),\qquad a \in \{1,2,3\},\qquad i \in \{1, \dots, n\}.\qquad (12)$

Deci $\nabla_X Y \in \Gamma(\mathcal{D})$, ceea ce implică

$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in \Gamma(\mathcal{D})$.

Astfel rezultă că $\mathcal{D}$ este integrabilă.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Folosind (9) și (4) și ținând cont ∇ este o conexiune fără torsiune, obținem

$$h(X, J_a Y) - h(Y, J_a X) = \sum_{i=1}^{n} \{g([X,Y], E_{ai}) U_i\} = 0,$$

pentru orice $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ și $a \in \{1,2,3\}$. Aceasta completează demonstrația teoremei. ■

Propoziția 2. *Operatorii formă A_i în raport cu secțiunile normale U_i, $i \in \{1, \dots, n\}$,* satisfac *identitățile:*

$A_i E_{aj} = A_j E_{ai},\qquad \forall a \in \{1,2,3\},\qquad i, j \in \{1, \dots, n\}.\qquad (13)$

Demonstrație. Luăm $X \in \Gamma(TN)$ și $Y = E_{1i}$ și folosind (6), (7) și (2) obținem

$-A_i X + \nabla_X^{\perp} U_i = J_1(\nabla_X E_{1i}) + J_1 h(X, E_{1i}) - \boldsymbol{q}(X) E_{3i} + \boldsymbol{r}(X) E_{2i}$.

Atunci folosind (8), (2) și egalitatea de mai sus deduce că

$$\begin{aligned} g(A_j E_{1i}, X) &= g(h(X, E_{1i}), U_j) = -g(J_1 h(X, E_{1i}), E_{1j}) = g(A_i X + J_1(\nabla_X E_{1i}), E_{1j}) \\ &= g(A_i X, E_{1j}) - g(\nabla_X E_{1i}, U_j) = g(X, A_i E_{1j})\,,\qquad \forall X \in \Gamma(TN), \end{aligned}$$

Ceea ce demonstrează (13) pentru $a = 1$. În mod similar dovedim (13) pentru $a = 2$ și $a = 3$.■

În continuare pe $\Gamma(\mathcal{D})$ definim 1 −formele

$\Omega_{aij}(X) \coloneqq g(\nabla_{E_{ai}} E_{aj}, X),\qquad (14)$

pentru orice $X \in \Gamma(\mathcal{D})$, $a \in \{1,2,3\}$ și $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Atunci putem stabili următoarea proprietate.

Propoziția 3. *Dacă N este o subvarietate normal anti-invariantă de codimensiune n a unei varietăți* para-*cuaternionice Kähler* $(M, \mathbb{V}, g)$, atunci avem:

$\Omega_{aij}(X) = \Omega_{aji}(X),\qquad \forall a \in \{1,2,3\},\qquad i, j \in \{1, \dots, n\},\qquad (15)$

și

$$\begin{aligned} &(a)\ g(\nabla_{E_{1i}} E_{2j}, X) = \Omega_{1ij}(J_3 X),\qquad g\left(\nabla_{E_{2j}} E_{1i}, X\right) = -\Omega_{2ij}(J_3 X), \\ &(b)\ g(\nabla_{E_{2i}} E_{3j}, X) = -\Omega_{2ij}(J_1 X),\qquad g\left(\nabla_{E_{3j}} E_{2i}, X\right) = -\Omega_{3ij}(J_1 X),\qquad (16) \\ &(c)\ g(\nabla_{E_{3i}} E_{1j}, X) = \Omega_{3ij}(J_2 X),\qquad g\left(\nabla_{E_{1j}} E_{3i}, X\right) = \Omega_{1ij}(J_2 X), \end{aligned}$$

pentru orice $X \in \Gamma(\mathcal{D})$.

Demonstrație. Folosind (14), (2), (6) și (7) obținem

$\Omega_{aij}(X) = g(\widetilde{\nabla}_{E_{ai}} J_a U_j, X) = g(J_a(\widetilde{\nabla}_{E_{ai}} U_j), X) = -g(\widetilde{\nabla}_{E_{ai}} U_j, J_a X) = g(A_j E_{ai}, J_a X),\qquad (17)$

pentru orice $a \in \{1,2,3\}$ și $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Atunci (15) rezultă prin folosirea lui (17) și (13). Apoi folosind (6), (2) și (14) deducem că

$$\begin{aligned} g(\nabla_{E_{1i}} E_{2j}, X) &= g(\widetilde{\nabla}_{E_{1i}} E_{2j}, X) = g(J_3(\widetilde{\nabla}_{E_{ai}} E_{2j}), J_3 X) = g(\widetilde{\nabla}_{E_{1i}} E_{1j}, J_3 X) = \\ &= \Omega_{1ij}(J_3 X),\qquad \forall X \in \Gamma(\mathcal{D}), \end{aligned}$$

Care dovedește prima egalitate în $(16a)$. În mod similar se obțin toate celelalte egalități în (16). ■

Teorema 2. Fie N o subvarietate normal anti-*invariantă a varietății para-cuaternionice Kähler* $(M, \mathbb{V}, g)$. *Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) *Distribuția* $\mathcal{D}^{\perp}$ *este integrabilă.*

(ii) $\Omega_{aij} = 0, \ \forall a \in \{1,2,3\}, \ i,j \in \{1, \dots, n\}$.

(iii) Pentru orice $X \in \Gamma(\mathcal{D})$ *și* $Y \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ avem

$$h(X,Y) = 0. \qquad (18)$$

Demonstrație. Ținând cont că ∇ este fără torsiune și folosind (14) și (15), deducem că

$$g\big([E_{ai}, E_{aj}], X\big) = 0, \qquad \forall X \in \Gamma(\mathcal{D}), \qquad a \in \{1,2,3\}, \qquad i,j \in \{1, \dots, n\}. \qquad (19)$$

Pe de altă parte, folosind (16) obținem

$$\begin{aligned} &(a)\ g\big([E_{1i}, E_{2j}], X\big) = \Omega_{1ij}(J_3X) + \Omega_{2ij}(J_3X), \\ &(b)\ g\big([E_{2i}, E_{3j}], X\big) = \Omega_{3ij}(J_1X) - \Omega_{2ij}(J_1X), \qquad (20) \\ &(c)\ g\big([E_{3i}, E_{1j}], X\big) = \Omega_{3ij}(J_2X) - \Omega_{1ij}(J_2X), \end{aligned}$$

pentru orice $X \in \Gamma(\mathcal{D})$. Atunci din (19) și (20) deducem că (iii) implică (i), deoarece $\{E_{ai}\}$, $a \in \{1,2,3\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ este o bază ortonormală a lui $\Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$.

Acum, să presupunem că $\mathcal{D}^{\perp}$ este integrabilă. Atunci, luând în considerare faptul că J_a, $a \in \{1,2,3\}$, sunt automorfisme ale lui $\Gamma(\mathcal{D})$ din (20) deducem că Ω_{aij} satisface sistemul algebric

$$\Omega_{1ij} + \Omega_{2ij} = 0, \ \Omega_{3ij} - \Omega_{2ij} = 0, \ \Omega_{3ij} - \Omega_{1ij} = 0.$$

Deci $\Omega_{aij} = 0$ pentru orice $a \in \{1,2,3\}$ și $i,j \in \{1, \dots, n\}$. Aceasta demonstrează că (i) implică (ii). În final, folosind (17) și (8) obținem

$$\Omega_{aij}(X) = g\big(h(J_aX, E_{ai}), U_j\big),$$

Pentru orice $a \in \{1,2,3\}$ și $i,j \in \{1, \dots, n\}$, care implică echivalența lui (ii) cu (iii). Aceasta completează demonstrația teoremei. ■

BIBLIOGRAFIE

[1] **Bejancu, A**., Geometry of CR-Submanifolds, D. Reidel Publish. Comp., Dordrecht, 1986.

[2] **Bejancu, A**, Normal semi-invariant submanifolds of *paraquaternionic Kähler manifolds*, Kuwait J. Sci. Eng., 33(2), (2006), 33-46.

[3] **Chen, B.Y.,** Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker, New York, 1973.

[4] **Chen, B.Y.,** CR-*submanifolds of a Kähler manifold I*, J. Diferential Geometry, 16, (1981), 305-322.

[5] **Chen, B.Y.,** CR-*submanifolds of a Kähler manifold II*, J. Diferential Geometry, 16, (1981), 493-509.

[6] **Craioveanu, M**., *Introducere în geometria diferențială*, Editura Universității de Vest, Timișoara, 2008.

[7] **Sahin, B., Atçeken, M**., Semi-invariant submanifolds of a Riemannian product manifold, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 8, no. 1, (2003), 91-100.

[8] **Garcia-Rio, E**., **Matsushita, Y.** and **Vazquez-Lorenzo, R**., Paraquaternionic K*ä*hler Manifolds, Rocky Mountain J. Math., 31, 2001, 237-260.

[9] **Yano, K., Kon, M., Ishihara, I**., Anti-invariant submanifolds with at normal connection, J. Diferential Geom, 4, (1978), 577-588.