Annals of the „Constantin Brâncuşi" University of Târgu Jiu, Letter and Social Science Series, Supplement 1/2016

APPLICATIONS OF SPATIAL AND TEMPORAL NORMS IN MINKOWSKI SPACE

Novac-Claudiu CHIRIAC,
Lector univ. dr.
Universitatea "Constantin Brâncuși" din Tg- Jiu

ABSTRACT: *The paper comprises applications to the lengths measurement with spatial norm, the relativity of the events temporal coordinate, duration measurement with the temporal norm, as well as the twins paradox construed in Minkowski space.*

KETWORDS: Minkowski space, indefinite spatial norm, indefinite temporal norm,

1. Introducere

Dacă ne raportăm la un sistem de referință inerțial, un eveniment este determinat prin patru coordonate: trei pentru poziția spațială și una pentru timp. Vom nota un eveniment printr-un sistem de patru numere reale $e = (t, x, y, z)$ sau cu notațiile omogenizate, $x_0 = ct$ (pe baza principiului II, de constanță a vitezei luminii) și restul pentru coordonate spațiale, $e = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Considerăm forma pătratică

$$Q(e) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Se știe că oricărei forme pătratice i se poate atașa un produs interior, adică o funcțională $(.,.): \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, prin intermediul căruia structurile matematice ale spațiului respectiv se construiesc conform unor metode tradiționale.

Acest produs interior este definit prin formula

$$(e_1, e_2) = \frac{1}{4}[Q(e_1 + e_2) - Q(e_1 - e_2)].$$

Notând $e_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ și $e_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$, se obține

$$(e_1, e_2) = c^2t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2.$$

Numim spațiu Minkowski mulțimea $\mathbb{R}^4$ (ca spațiu liniar) dotată cu produsul interior între evenimente definit anterior. Pe scurt notăm $(\mathbb{R}^4, (.,.))$ și îl putem numi spațiul evenimentelor care se produc în $\mathbb{R}^3$.

Fie $(E, (.,.))$ un spațiu Minkowski și Q forma pătratică atașată acestuia. Spunem despre evenimentele $e_1, e_2 \in E$ că sunt în relație de cauzalitate (sau relație temporală), mai precis e_1 este cauză pentru e_2 sau e_2 este efect al lui e_1, dacă $e_1 = e_2$ sau $t_1 < t_2$ și $Q(e_2 - e_1) > 0$. Notând relația de cauzalitate cu $\boldsymbol{K} \subset E \times E$, avem deci

$$\boldsymbol{K} = \left\{(e_1, e_2): e_1 = e_2 \; sau \; c(t_2 - t_1) > \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right\}$$

Relația $\boldsymbol{S} \subset E \times E$ definită prin :

$$\boldsymbol{S} = \left\{(e_1, e_2): e_1 = e_2 \; sau \; c|t_2 - t_1| < \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right\}$$

se va numi relație spațială sau relație de independent cauzală.

Atunci când pe un spațiu liniar E este definit un produs scalar, printr-o construcție standard se obține o normă precum și o metrică.

Această construcție nu este realizabilă întocmai în cazul spațiilor Minkowski unde produsul interior $(e, e) = Q(e)$ poate fi și pozitiv și negativ dar și zero pentru $e \neq 0$. Un alt motiv pentru care această construcție nu se poate aplica în spațiile Minkowski este acela că regula triunghiului este uneori inversată.

În concluzie, pe de o parte expresiile prin care definim normele și metricile spațiului Minkowski trebuie să țină cont de tipul vectorilor respectivi, iar pe de altă parte inegalitățile fundamentale trebuie formulate în funcție de natura laturilor triunghiului. Vom realiza aceste cerințe considerând norme restrânse, adică definite numai pentru anumiți vectori ai spațiului, determinați de relațiile binare definite anterior. Astfel normele nu vor fi definite pe întregul E ci vor fi restrânse la părți ale acestui spațiu.

Definiție. Numim <u>normă indefinită temporală</u> pe spatiul Minkowski E funcționala $\|.\|_t : K[0] \to \mathbb{R}_+$ definită prin expresia :

$$\|e\|_t = (e, e)^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}$$

Numim <u>normă indefinită spațială</u> pe spatiul Minkowski E funcționala $\|.\|_s : S[0] \to \mathbb{R}_+$ definită prin expresia :

$$\|e\|_s = [-(e, e)]^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}$$

2. Măsurarea lungimilor cu norma spațială.

Considerăm $\omega = \{\lambda(1, v) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, atunci $\omega^{\perp} = \{\mu(vc^{-2}, 1) : \mu \in \mathbb{R}\}$, astfel că $e = (lvc^{-2}, l)$. Rezultă astfel că lungimea aparentă pentru ω este dată de norma spațială, adică

$$\|e\|_s = \sqrt{l^2 - c^2 v^2 c^{-4} l^2} = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l'$$

Mai mult , norma spațială permite observatorului ω să afle lungimea barei măsurate în poziție de repaus. Pentru aceasta trebuie să considerăm că ω poate localiza două evenimente din capetele barei, simultan în reperul legat rigid de bară, de exemplu evenimentele de coordonate (0,0) și (l,l). Conform formulelor anterioare observatorul va găsi pentru aceste evenimente coordonatele (0,0) și respectiv

$$\left(\frac{-\frac{v}{c^2} l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Se vede ușor că norma spațială a acestui ultim element este tot l, deși coordonatele spațiale și temporale s-au schimbat, coordonata spațială indicând chiar o dilatare a lungimii segmentului măsurat, de la valoarea l la valoarea $l(1 - v^2c^{-2})^{-1/2}$.

Acest fapt arată că, luate separate, spațiul și timpul sunt noțiuni relative, în timp ce luate împreună, în cadrul spațiu-timpului, ne permit găsirea unor invarianți, în cazul nostru lungimea măsurată cu norma spațială. Concluzia în cazul lungimii segmentelor poate fi formulată astfel:

Propoziție. Dacă e_1 și e_2 formează o pereche spațială de evenimente pentru un observator Ω_0, adică $(e_1, e_2) \in \boldsymbol{S}$, atunci:

1) Există un observator inerțial ω_0 pentru care e_1 și e_2 sunt simultane.
2) Pentru orice observator inerțial ω pentru care e_1 și e_2 sunt simultane, există un segment E_1E_2, în repaus față de ω, încât e_1 și e_2 să fie evenimente la capetele segmentului.
3) Orice asemenea observator inițial ω măsoară aceeași lungime (de repaus) a segmentului E_1E_2.
4) Oricare ar fi un alt observator inerțial Ω, $\|e_1 - e_2\|_s = \xi(e_1, e_2)$, măsurată de acesta, coincide cu lungimea de repaus a segmentului respectiv.

3. Relativitatea coordonatei temporale a fenomenelor

Să considerăm că în același loc, în sistemul de referință (considerat fix) Ω, au loc două evenimente, la momentul t_1 și t_2 după aprecierea acestui observator. Dacă ω este un observator inerțial care se mișcă față de Ω cu viteza v, conform formulelor lui Lorentz speciale (pe care le folosim doar pentru simplificarea scrierii, dar rezultatele se mențin și în cazul general), observatorul acesta nu va recepționa aceste evenimente în același loc și mai mult se va modifica și intervalul de timp, adică:

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Deoarece $(1 - v^2c^{-2})^{-1/2} \geq 1$, cu egalitate pentru $v = 0$ formula

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

indică o dilatare a timpului pentru observatorul mobil ω.

Desigur, acest efect are un caracter de reciprocitate, adică și observatorul Ω constată o dilatare a intervalului de timp între două evenimente ce se petrec în același loc în ω. În calcul acest fapt se reflectă în aceea că schimbând pe v cu $-v$ adică considerând transformările Lorentz inverse, se găsește formula anterioară sub forma

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

În concluzie putem formula următorul rezultat:

Propoziție. Dacă două sisteme de referință inerțiale se mișcă unul față de celălalt cu o viteză v atunci fiecare recepționează evenimentele ce se petrec în același loc în celălat sistem, la intervale de timp dilatate cu factorul $(1 - v^2c^{-2})^{-1/2}$.

4. Măsurarea duratelor cu norma temporală

Deși timpul-coordonată, cel prin care fiecare observator localizează evenimentele, este relativ, adică se schimbă de la un reper la altul și prezintă fenomenul de dilatare, acest timp este totuși real, obiectiv și măsurabil ca atare.

Ca și la lungimi, se poate vorbi despre timp sau durate în repaus și timp sau durate relative. Problema care apare este dacă, folosind coordonatele evenimentelor considerate, observatorul mobil poate afla durata în repaus dintre aceste evenimente. Răspunsul este afirmativ și se bazează pe invarianța normei (și metricii) temporale față de transformările Lorentz.

Propoziție. Dacă e_1 și e_2 formează o pereche temporală de evenimente pentru observatorul Ω_0, atunci:

1) Există un observator inerțial ω_0 pentru care evenimentele acestea se petrec în același loc.
2) Toți acești observatori (de tipul lui ω_0 notați generic ω) au aceeași viteză, v, față de Ω_0 .
3) Toți acești observatori, ω, măsoară aceeași durată de repaus, t_0, între evenimentele e_1 și e_2 .
4) Oricare ar fi un alt observator inerțial Ω, norma temporală a diferenței acestor evenimente este:
   $\|e_1 - e_2\|_t = ct_0$.

5. Paradoxul gemenilor (sau al ceasurilor)

Efectul relativist de dilatare a timpului poate fi preluat din exemplul μ-mezonilor sau din alte experiențe fizice și aplicat proceselor biologice, de viață, deoarce acestea au la bază fenomenele fizice și chimice ale matabolismului, iar principiile Teoriei Relativiste Restrânse au fost formulate pentru toate fenomenele posibile. Ne putem pune deci problema de a compara viețile a doi gemeni născuți pe Pământ, dintre care unul pornește într-o călătorie în Cosmos cu o viteză comparabilă cu viteza luminii. Într-o variantă simplificată, care ocolește complicațiile datorate profunzimii fenomenului “viață”, experimentul poate fi conceput cu două ceasuri identice, dintre care unul este lansat pe o navă cosmică. Dacă vom considera numai cazul mișcării rectilinii și uniforme, situația se prezintă exact ca în cazul μ-mezonilor, fiind caracterizată prin reciprocitate, adică fiecare dintre cei doi gemeni îl vede pe celălalt îmbătrânind mai încet (ca urmare a dilatării timpului, respectiv încetinirii mersului ceasurilor și a proceselor metabolice în sistemul celuilalt). Ce s-ar întâmpla însă dacă la jumătatea drumului propus, fratele pornit în cosmos se întoarce spre Pământ cu aceeași viteză? Desigur în acest caz sistemul de referință al navei lui nu mai este unul inerțial, deoarece întoarcerea presupune o frânare și apoi o nouă accelerare în sens invers, deci o intervenție exterioară, o interacțiune (frânarea este și ea o accelerare de sens opus direcției de mișcare). În consecință nu se va menține reciprocitatea în privința modului cum fiecare observator vede evoluția celuilalt. Astfel, dacă ω se mișcă față de Ω cu viteza v, iar evenimentul de întoarcere este localizat de Ω cu coordonatele (t_0, vt_0), pentru ω acest eveniment are loc în momentul

$$\frac{1}{c}\|A\|_t = t_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Situația fiind similară, la întoarcere apare acelaşi decalaj de timp. În final, când cei doi de întâlnesc, deci se realizează evenimentul **B**, pentru Ω a trecut timpul t_0, iar pentru ω a trecut doar $2t_0(1 - v^2c^{-2})^{-1/2}$. Considerând evenimentul $C = \left(\frac{1}{c}\|A\|_t, 0\right)$, pentru care $\|C\|_t = \|A\|_t$, se vede că diferența de timpi măsurați de Ω și ω va fi

$$\Delta_t = 2t_0\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

Ceea ce arată că observatorul Ω, rămas pe Pământ îmbătrânește mult mai repede.

De exemplu, dacă $v = 299985\ km/s$ și $t_0 = 100\ ani$, am avea $\frac{1}{c}\|A\|_t = 1\ an$, deci în timp ce ω îmbătrânește cu doi ani, pe Pământ trec 200 de ani. Desigur, în contextul mecanicii newtoniene o asemenea situație este imposibilă, paradoxală. Totuși, conform teoriei relativității generalizate acest fenomen este posibil.

BIBLIOGRAFIE

1. **Bălan T**., *Generalizing the Minkowskian Spacetime* I, II Stud. Cerc. Mat., Tom 44(1992), Nr. 2, p. 89-107, Nr. 4, p. 267-284
2. **Einstein A**., *Teoria Relativității*, Ed. Tehnică, București, 1957.
3. **Lorentz H.A., Einstein A., Minkowski H**., *Das Relativitatsprinzip*, Leipzig, 1913.
4. **Naber G**., *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer-Verlag, 1992.
5. **Zeeman E.C.,** *The topology of Minkowski space, Topology*, vol. 6 (1967), p. 161-170.