QUADRI-DIMENSIONAL PHYSICAL MEASURES

Novac-Claudiu CHIRIAC
Universitatea "Constantin Brâncuși" din Tg-Jiu

ABSTRACT.
IN THIS PAPER WE PRESENT THE PRINCIPLES NECESSARY FOR THE CONSTRUCTION OF RELATIVISTIC DYNAMICS. NEXT WE DISCUSS THE PHYSICAL DIMENSION OF A 4-DIMENSIONAL PHYSICAL SIZE. IN THE LAST CHAPTER WE WILL GIVE SOME EXAMPLES OF FOUR-DIMENSIONAL PHYSICAL SIZES.

KEYWORDS: *MINKOWSKI SPACE, FOUR-DIMENSIONAL SPACE, RELATIVITY PHYSICS.*

1.INTRODUCERE

Legătura între mărimile fizice clasice si cele relativiste reprezintă o primă cerință ce se impune construcției dinamicii relativiste cunoscută ca *principiu de corespondență*.

Principiul inerției care stă la baza tuturor considerațiilor relativității restrânse conduce la cea de-a doua cerință în construcția mărimilor fizice ce apar în relativitate și anume la o schimbare a sistemului de referință, ele să se transforme covariant sau contravariant. Numai asa se poate asigura invarianța legilor exprimate cu aceste mărimi, deci respectarea principiului de inerție. Condiția ca mărimile fizicii relativiste să aibă caracter de vector, tensor, etc., reprezintă *principiul de covarianță* al dinamicii relativiste.

Avănd in vedere faptul că transformările fundamentale ale mecanicii relativiste (adică transformările Lorentz) acționează pe $\mathbb{R}^4$, principiul de covarianță ne conduce la a considera marimi fizice 4-dimensionale. Astfel construcția noțiunii de eveniment ca 4-vector cu o coordonată temporală și 3 coordonate spațiale, va fi facută prin introducerea unor mărimi 4-dimensionale ce se obțin prin combinații de scalari și vectori 3-dimensionali. Cu această ocazie apare insă o nouă problemă: Ce dimensiune fizică (respectiv ce natură) are 4-vectorul ale cărui componente au dimensiuni fizice diferite? De exemplu, ce dimensiune fizică are un eveniment, timp sau spațiu?

Este natural ca în construcția mărimilor dinamicii relativiste să se respecte și *principiul dimensiunii fizice*, adică toate componentele mărimii relativiste considerate să aibă aceeași dimensiune fizică și aceasta să coincidă cu dimensiunea mărimii clasice pe care o generalizează. Numai respectarea acestui principiu ne permite să considerăm că 4-vectorii și 4-tensorii construiți cu componentele respective reprezintă mărimi fizice reale.

2. DIMENSIUNEA FIZICĂ A UNEI MĂRIMI

Dimensiunea fizică a unei mărimi μ este o formula notată $[\mu]$ care ne arată cum este derivată această mărime din mărimile fizice fundamentale. Reamintim că mărimile fizice fundamentale în sistemul international sunt

Nr.	Mărimea	Dimensiunea	Unitatea	Prescurtarea
1.	Lungime	L	metru	m
2.	Masă	M	kilogram	kg
3.	Timp	T	secundă	s
4.	Intensitatea curentului electric	I	amper	A
5.	Temperatura termodinamică	Θ	grad Kelvin	^{o}K
6.	Cantitatea de substanță	S	mol	mol
7.	Intensitatea luminii	Λ	candelă	Cd

Se constată cu ușurință că în mecanica relativistă se utilizează numai primele trei mărimi fundamentale. Spre exemplu forța are dimensiunea $[F] = LMT^{-2}$ reprezentând produsul masei cu accelerația.

Menționăm că, spre deosebire de mecanica clasică, unde dimensiunea mărimii determină și natura acesteia, în mecanica relativistă natura mărimii fizice depinde și de alte considerente. Ca exemplu, natura 4-vectorilor de poziție ai evenimentelor este determinată și de tipul acestora, temporal sau spațial, fapt care poate fi decisiv în a alege dimensiunea fizică ce o atribuim acestora. Putem însă formula unele convenții asa cum vom arăta în continuare.

2.1. Dimensiunea evenimentelor, respectiv a 4- vectorilor de poziție ai evenimentelor din spațiul Minkowski, pare a fi imposibil de definit, deoarece o componentă reprezintă timp, iar celelalte reprezintă spațiu. Analizând însă mai atent principiul constanței vitezei luminii, constatăm că aceasta exprimă și o echivalență dintre mărimile spațiu și timp. Putem deci înlocui timpul prin spațiul pe care lumina îl parcurge în vid în acest timp și invers, putem exprima spațiul prin timpul necesar luminii pentru a-l parcurge. Astfel se vede că de fapt nu suntem în imposibilitatea de a defini dimensiunea unui 4-vector de poziție din spațiul Minkowski, ci ne aflăm în fața unei alternative între dimensiunile L și T. Ținând cont că este vorba de"poziție", care în spatiul 3-dimensional este determinată prin lungimi, precum și de consecințele asupra dimensiunii celorlalte mărimi fizice, convenim ca evenimentele, respective 4-vectorii lor de poziție, să aibă dimensiunea L. Aceasta se realizează prin introducerea primei componente de forma $x_0 = ct$, unde c este viteza luminii în vid exprimată în m/s.

În concluzie, pentru $e = (ct, x, y, z)$ avem $[e] = L$ și unitatea de măsură metrul.

2.2. Dimensiunea timpului propriu este firesc să fie T. Știm însă că dacă e este un eveniment temporal, adică $e \in \boldsymbol{K}[0]$, atunci timpul propriu care se scurge între 0 și e este

$$\tau = \|e\|_t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t \ , \qquad (1)$$

Deoarece $[\theta] = T$ și unitatea de măsură este secunda.

3. **MĂRIMI FIZICE CUADRIDIMENSIONALE**

3.1.Cuadrivectorul viteză

Acesta este construit ca o derivată, $= \frac{de}{d\tau}$, și el reprezintă un 4-vector contravariant de tip temporal, de normă temporală $\|\mathcal{V}\|_t = 1$ (vezi [4]). Construcția lui respectă deci principiul de covarianță. Deoarece ultimele sale trei component se reduc chiar la componentele vitezei tridimensionale dacă $\ll c$, este respectat și principiul de corespondență.

Principiul dimensiunii nu este însă respectat deoarece $[\tau] = L$, deci $\mathcal{V}$ nu are dimensiune. Acest inconvenient se înlătură dacă derivate în raport cu τ se înlocuiește cu derivate în raport cu θ, obținând pentru cuadriviteză expresia

$$\mathcal{U} = \frac{de}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2c^{-2}}}, \frac{\bar{v}}{\sqrt{1-v^2c^{-2}}}\right). \qquad (2)$$

Astfel $[\mathcal{U}] = LT^{-1}$ și unitatea de măsură este $/s$, deci $\mathcal{U}$ îndeplinește toate condițiile pentru a reprezenta 4-viteza, primele două principia fiind asigurate de relația $\mathcal{U} = c\mathcal{V}$. În particular mai rezultă și $\|\mathcal{U}\|_t = c$.

3.2 Cuadriaccelerația.

Cuadriaccelerația pe care o introducem prin formula $d\mathcal{V}/d\tau$, necesită aceleași modificări ca și 4-viteza. Vom considera în continuare cuadriaccelerația sub forma

$$\mathcal{A} = \frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2c^{-2}}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2c^{-2}}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2c^{-2}}}\frac{d}{dt}\frac{\bar{v}}{\sqrt{1-v^2c^{-2}}}\right), \quad (3)$$

astfel că $[\mathcal{A}] = LT^{-2}$ și unitatea de măsură este m/s^2.

La fel ca și , mărimea $\mathcal{A}$ este un 4-vector contravariant. În plus avem $\mathcal{U} \perp \mathcal{A}$, deci $\mathcal{A}$ este un 4-vector de tip spatial. Dacă $v \ll c$, avem $\mathcal{A} = (0, \bar{a})$, ceea ce ilustrează foarte bine principiul de corespondență.

3.3 Cuadrivectorul energie-impuls

Acesta se definește prin formula

$$\mathcal{P} = m_0\mathcal{U}, \qquad (4)$$

unde m_0 este masa de repaus a particulei, iar $\mathcal{U}$ este 4-viteza acesteia. Se observă că $\mathcal{P} = LMT^{-1}$, iar unitatea de măsură este $kg \cdot m/s$.

Explicitând componentele în formula (4) se obține:

$$\mathcal{P} = (mc, m\bar{v}),$$

unde $m = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ este masa relativistă a particulei. Dacă ținem cont că $mc = c^{-1}\mathcal{E}$ unde $\mathcal{E}$ este energia relativistă totală, iar $m\bar{v} = \bar{p}$ este impulsul relativist, se vede că definiția 4-vectorului energie impuls respectă principiul de corespondență, adică pentru $v \ll c$ avem $m = m_0$, iar $m_0\bar{v}$ este impulsul classic. În concluzie avem:

$$\mathcal{P} = \left(\frac{1}{c}\mathcal{E}, \bar{p}\right). \qquad (5)$$

ceea ce justifică denumirea de *cuadrivector energie-impuls* dată mărimii $\mathcal{P}$.

Teorema 1. Mărimea fizică $\mathcal{P}$ este un cuadrivector contravariant din spatial Minkowski $\mathbb{R}^4$, de tip temporal, a cărui normă temporală este un invariant, având mereu valoarea:

$$\|\mathcal{P}\|_t = m_0c\,. \qquad (6)$$

Demonstrație. Cuadrivectorul viteză $\mathcal{U}$ este contravariant, de tip temporal, cu prima component pozitivă, deci și $\mathcal{P}$, care se obține din $\mathcal{U}$ prin înmulțire cu constanta pozitivă m_0, va fi la fel. Deoarece $\|\mathcal{U}\|_t = c$, rezultă imediat (6). Invarianța normei temporale este și o consecință a caracterului de cuadrivector contravariant al lui $\mathcal{P}$. ■

Legătura dintre masă energie și impuls este o consecință imediată a acestei teoreme. Energia relativistă totală a unei particule cu masa de repaus m_0 și impulsul $\bar{p}$ este:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \qquad (7)$$

Într-adevăr, calculând norma temporală pentru $\mathcal{P}$ scris sub forma din (5), găsim valoarea:

$$\mathcal{P}_t^2 = \frac{1}{c^2}\mathcal{E}^2 - p^2\,,$$

care, împreună cu (6), conduce la formula (7).

3.4. Cuadrivectorul putere-forță.

Acesta se definește prin formula

$$\mathcal{F} = \frac{d\mathcal{P}}{d\theta}, \qquad (8)$$

unde θ este timpul propriu măsurat în secunde,adică:

$$\Delta\theta = \sqrt{1 - v^2c^{-2}}\Delta t\,.$$

Folosind forma (5) pentru impuls, pentru 4-forță găsim expresia:

$$\mathcal{F} = \left(\frac{1}{c\sqrt{1 - v^2c^{-2}}}\frac{d\mathcal{E}}{dt}, \frac{\bar{F}}{\sqrt{1 - v^2c^{-2}}}\right), \qquad (9)$$

unde $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$ este forța relativistă tridimensională, iar $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ este puterea relativistă, egală prin definiție cu variația energiei relativiste totale în timp. Formula (9) justifică și denumirea de cuadrivector putere-forță pentru $\mathcal{F}$. Ținând cont de formula lui Einstein pentru energia relativistă totală, formula (9) se mai poate scrie și sub forma:

$$\mathcal{F} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2c^{-2}}}\frac{dm}{dt}, \frac{\bar{F}}{\sqrt{1 - v^2c^{-2}}}\right). \qquad (10)$$

Dimensiunea fizică a lui $\mathcal{F}$, ca și cea a lui $\bar{F}$, este LMT^{-2}, deci se respectă principiul dimensiunii.

Teorema 2. Mărimea $\mathcal{F}$ este un cuadrivector contravariant de tip spatial din spatial Minkowski $\mathbb{R}^4$, orthogonal pe 4-vectorul $\mathcal{P}$.

Demonstrație. Contravarianța lui $\mathcal{F}$ rezultă din formula de definiție (8), unde $\mathcal{P}$ este un 4-vector contravariant, iar θ este un invariant față de transformările lui Lorentz. Ortogonalitatea lui $\mathcal{F}$ cu $\mathcal{P}$ (în sensul produsului interior indefinite al spațiului Minkowski) rezultă din aceea că $\|\mathcal{P}\|_t = m_0c$ este o constantă. Într-adevăr, derivând în relația $(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = m_0^2c^2$, obținem $\left(\mathcal{P}, \frac{d\mathcal{P}}{d\theta}\right) = 0$.

Faptul că $\mathcal{F}$ este un vector de tip spatial rezultă din ortogonalitatea lui pe un vector de tip temporal. ■

3.5. Consecințe.

1. Ecuația fundamental a dinamicii relativiste este o reformulare a principiului forței din mecanica clasică, pentru mărimile 4-vectoriale, exprimând legatura dintre 4-forță și 4-accelerație

$$\mathcal{F} = m_0\mathcal{A}\,. \qquad (11)$$

Într-adevăr, ținând cont că $m = m_0(1 - v^2c^{-2})^{-1/2}$, putem înlocui în (10) astfel

$$\frac{dm}{dt} = m_0\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2c^{-2}}}$$

și respectiv

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}\frac{\bar{v}}{\sqrt{1 - v^2c^{-2}}}.$$

Se obțin astfel pentru $\mathcal{F}$, în afară de factorul m_0, componentele 4-accelerației așa cum sunt scrise în (3).

2. Puterea relativistă este o putere a forței relativiste tridimensionale, adică

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \langle\bar{F}, \bar{v}\rangle\,. \qquad (12)$$

Pentru a obține această formula scriem ortogomalitatea lui $\mathcal{F}$ cu $\mathcal{P}$, respective cu $\mathcal{U}$, în produsul interior al spațiului Minkowski $\mathbb{R}^4$. Exprimând pe $\mathcal{F}$ ca în formula (9) (sau (10)), după simplificări obținem (12).

3. Cuadrivectorul forță mai admite și exprimarea

$$\mathcal{F} = \left(\frac{1}{c\sqrt{1-v^2c^{-2}}}\frac{dL}{dt}, \frac{\bar{F}}{\sqrt{1-v^2c^{-2}}}\right), \tag{13}$$

unde L este lucru mechanic al forței relativiste tridimensionale.

Într-adevăr, din formula (12) deducem că:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t} = \langle \bar{F}, \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\rangle = \frac{\langle \bar{F}, \Delta\bar{r}\rangle}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \ ,$$

Rămânând să aplicăm formula (9) pentru $\mathcal{F}$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Anderson J., *Principes of relativity Physics*, Academic Press,1967
[2] Bălan T., Chiriac I., *Relativity in true time*, Editura Universitaria Craiova, 2001.
[3] Callahan J., *The Geometry of Spacetime*, Springer-Verlag, 2000
[4] Chiriac N. C., Cuadrivectorul viteză, Annals of the Constantin Brancusi University of Targu Jiu-Letters & Social Sciences Series . 2017 Supplement, p130-135.
[5] Naber G., *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer-Verlag, 1992.
[6] Zeeman E.C., The topology of Minkowski space, Topology, vol. 6 (1967), p. 161-170.