QUADRI-TENSORIAL PHYSICAL MEASURES

Novac-Claudiu CHIRIAC
Universitatea “Constantin Brâncuși” din Tg-Jiu

ABSTRACT. *IN THIS PAPER WE PROPOSE TO DEFINE WITHIN MINKOWSKI'S 4-DIMENSIONAL SPACE THE MOST IMPORTANT PHYSICAL QUANTITIES WITH TENSOR CHARACTER FROM CLASSICAL MECHANICS, NAMELY, THE KINETIC MOMENT AND THE MOMENT OF FORCE. WE WILL FIRST DEFINE THE VECTOR PRODUCT TENSOR AFTER WHICH WE WILL DEFINE THE KINETIC MOMENT QUADRATIC-TENSOR AND THE MOMENT QUADRATIC-TENSOR OF THE 4-RELATIVISTIC FORCE ALSO PRESENTING THEIR FORMS.*

KEYWORDS: *MINKOWSKI SPACE, QUADRATIC-TENSOR, RELATIVISTIC FORCE*

1.INTRODUCERE

Cele mai importante mărimi fizice cu caracter tensorial din mecanica clasică sunt momentul cinetic $\bar{l} = \bar{r} \times \bar{p}$ și momentul forței $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$, mărimi pe care ne propunem să le definim și în cadrul spațiului 4-dimensional al lui Minkowski. În definirea acestor mărimi s-a utilizat însă produsul vectorial, operație specifică spațiului 3-dimensional, care mu poate fi preluată în form ei vectorială pentru 4-vectori, ci necesită considerații de algebră tensorială.

Într-adevăr, pentru produsul vectorial al vectorilor $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ avem două definiții echivalente:

1. <u>Definiția sintetică</u>: $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2$ este un vector perpendicular pe $\bar{a}_1$ și pe $\bar{a}_2$, de mărime egală cu aria paralelogramului de laturi $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$, orientat după regula burghiului.
2. <u>Definiția analitică</u>: Dacă $\bar{a}_n = a_{n1}\bar{\imath} + \bar{a}_{n2}\bar{\jmath} + \bar{a}_{n3}\bar{k}$, pentru $n = 1,2$, atunci

$$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Prima definție nu poate fi adoptată în $\mathbb{R}^4$ deoarece (în afară de semnificația deosebită a ortogonalității) varietatea liniară ortogonală pe 2 vectori este bidimensională, deci nu determină o singură direcție. După cea de-a doua definiție ar fi natural să considerăm un produs vectorial a trei cuadrivectori, pentru a forma un determinant de ordinul patru.

2. TENSORUL PRODUS VECTORIAL

Produsul vectorial a doi 4-vectori (sau chiar *n*-vectori) poate fi definit ca tensor, pornind de la observația că de fapt el are componente cu doi indici, unul de la componentele vectorului $\bar{a}_1$ și celălalt de la componentele lui $\bar{a}_2$. Pentru a putea realiza această extensie a noțiunii de produs vectorial, vom analiza produsul vectorial din $\mathbb{R}^3$ din punct de vedere tensorial.

Tensorul produs vectorial al vectorilor din $\mathbb{R}^3$ se definește cu ajutorul tensorului de ordinul trei, unitar și complet antisimetric $\delta = (\delta_{\alpha\beta\gamma})$ ce apare în relațiile care dau produsele vectoriale ale vectorilor bazei ortonormate $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Într-adevăr între elementele bazei avem relațiile

$$\bar{e}_\alpha \times \bar{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta\gamma}\bar{e}_\gamma \ , \tag{1}$$

câte una pentru fiecare $\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$, care permit scrierea produsului vectorial dintre oricare doi vectori $\bar{a}_1 = a_{1\alpha}\bar{e}_\alpha$ și $\bar{a}_2 = a_{2\beta}\bar{e}_\beta$ sub forma

$$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \delta_{\alpha\beta\gamma}a_{1\alpha}a_{2\beta}\bar{e}_\gamma \ .$$

Am scris vectorii fără "bară" considerându-i tensori de ordinul întâi în $\mathbb{R}^3$; am folosit de asemenea convenția de sumare după indicii ce apar de două ori. Se vede că valorile componentelor lui nenule sunt ± 1, adică δ este unitar. În plus, orice schimbare a ordinei indicilor schimbă semnul componentei respective, adică δ este complet antisimetric. În consecință toate componentele corespunzătoare unor indici egali sunt nule. Fiind un tensor de ordinul trei, putem așeza componentele lui într-o rețea tridimensională cu $3 \times 3 \times 3 = 27$ noduri.

Din punct de vedere al clasificării tensoriale, δ este un pseudo-tensor metric de ordinul trei, așa cum rezultă din formulele de schimbare a componentelor:

$$\delta'_{\alpha\beta\gamma} = t_{\alpha p}t_{\beta q}t_{\gamma r}\delta_{pqr} \ .$$

Într-adevăr, dacă $T = (t_{\alpha p})$ este o transformare metrică a lui $\mathbb{R}^3$ avem $Det\ T = \pm 1$, iar pe de altă parte, conform definiției determinanților avem și $Det\ T = t_{1p}t_{2p}t_{3r}\delta_{pqr}$. Astfel, dacă pentru o combinație $\alpha\beta\gamma$ avem $\delta_{\alpha\beta\gamma} = \pm 1$, atunci $\delta'_{\alpha\beta\gamma}$ va fi și el ± 1, în funcție de semnul determinantului și paritatea permutării $(1,2,3) \to (\alpha, \beta, \gamma)$.

Folosind proprietățile tensorului δ putem introduce *tensorul produs vectorial* $B = (B_{\alpha\beta})$ prin formula :

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 &= (a_{1\alpha}e_\alpha) \times (a_{2\beta}e_\beta) = a_{1\alpha}a_{2\beta}e_\alpha \times e_\beta = a_{1\alpha}a_{2\beta}\delta_{\alpha\beta\gamma}e_\gamma = \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta\gamma}a_{1\alpha}a_{2\beta} + \delta_{\beta\alpha\gamma}a_{1\beta}a_{2\alpha})e_\gamma = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta\gamma}(a_{1\alpha}a_{2\beta} - a_{1\beta}a_{2\alpha})e_\gamma = \\ &= \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta\gamma}B_{\alpha\beta}e_\gamma \ . \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, componentele acestui tensor sunt:

$$B_{\alpha\beta} = a_{1\alpha}a_{2\beta} - a_{1\beta}a_{2\alpha} \ . \tag{2}$$

Legătura dintre tensorul B și tensorul produs vectorial $b = (b_\gamma) = a_1 \times a_2$ este realizată tot prin tensorul δ și anume:

$$b_\gamma = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta\gamma}B_{\alpha\beta} \ , \tag{3}$$

Legătură cunoscută sub numele de *relație de dualitate* între tensorul B și vectorul b. Se vede că, cu excepția obținerii vectorului b din relația de dualitate, construcția de mai sus poate fi făcută pentru vectori în $\mathbb{R}^4$, sau în general în $\mathbb{R}^n$, produsul vectorial a doi vectori fiind un tensor (ortogonal pe cei doi vectori într-un sens oarecare, derivat din structura spațiului euclidian respectiv).

3. CUADRITENSORUL MOMENT CINETIC

Cuadritensorul moment cinetic este, prin definiție, tensorul de ordinul doi $\mathcal{K} = e \times \mathcal{P}$. Componentele sale $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ sunt date, conform definiției produsului vectorial discutată mai sus, de formule de tipul (2), adică

$$\boldsymbol{K}_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha \quad ; \qquad \alpha, \beta = 0,1,2,3, \tag{4}$$

unde x_α sunt componentele 4-vectorului de poziție al evenimentului e, adică

$$\begin{cases} x_0 = ct \\ x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases},$$

iar p_α sunt componentele cuadriimpulsului $\mathcal{P}$, deci

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1}{c}\mathcal{E} \\ p_1 = p_x \\ p_2 = p_y \\ p_3 = p_z \end{cases}$$

unde $\mathcal{E} = mc^2$ este energia relativistă a particulei considerate. Explicitând componentele $\boldsymbol{K}_{\alpha\beta}$, cuadritensorul moment cinetic poate fi scris sub forma următoarei matrici:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & c\left(tp_x - \dfrac{x}{c^2}\mathcal{E}\right) & c\left(tp_y - \dfrac{y}{c^2}\mathcal{E}\right) & c\left(tz - \dfrac{z}{c^2}\mathcal{E}\right) \\ -c\left(tp_x - \dfrac{x}{c^2}\mathcal{E}\right) & 0 & xp_y - yp_x & zp_x - xp_z \\ -c\left(tp_y - \dfrac{y}{c^2}\mathcal{E}\right) & \dfrac{-l_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & yp_z - zp_y \\ -c\left(tz - \dfrac{z}{c^2}\mathcal{E}\right) & \dfrac{-l_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \dfrac{-l_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

unde $xp_y - yp_x$, $zp_x - xp_z$, $yp_z - zp_y$, pentru a le compara cu elementele de sub diagonală, sunt componentele momentului cinetic relativist tridimensional, care diferă de momentul cinetic în sens clasic (l_x, l_y, l_z) prin factorul $(1 - v^2c^{-2})^{-1/2}$.

În concluzie, 4-tensorul momentic cinetic este un tensor de ordinul doi contravariant în spațiul Minkowski, cu dimensiunea fizică $[\mathcal{K}] = ML^2T^{-1}$, care, pentru $v \ll c$, conține toate componentele momentului cinetic clasic.

4. CUADRITENSORUL MOMENT AL 4-FORȚEI RELATIVISTE

Definim cuadritensorul moment al 4-forței relativiste prin formula simbolică

$$\mathcal{M} = e \times \mathcal{F} ,$$

unde $\mathcal{F}$ este 4-vectorul putere-forță. Ținând cont de expresiile componentelor produsului vectorial (2), componentele lui $\mathcal{M}$ vor fi:

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = x_\alpha F_\beta - x_\beta F_\alpha \; ; \quad \alpha, \beta = 0,1,2,3 . \tag{5}$$

Unde $e = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ și $\mathcal{F} = (F_0, F_1, F_2, F_3)$.

Înlocuind componentele 4-forței obținem componentele $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ sub forma:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{ctF_x - \frac{x}{c}\mathcal{C}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \dfrac{ctF_y - \frac{y}{c}\mathcal{C}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \dfrac{ctF_z - \frac{z}{c}\mathcal{C}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \dfrac{\frac{x}{c}\mathcal{C} - ctF_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & \dfrac{xF_y - yF_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \dfrac{zF_x - xF_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \dfrac{\frac{y}{c}\mathcal{C} - ctF_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \dfrac{yF_x - xF_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & \dfrac{yF_z - zF_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \dfrac{\frac{z}{c}\mathcal{C} - ctF_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \dfrac{xF_z - zF_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \dfrac{zF_y - yF_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

unde $\mathcal{C} = d\mathcal{E}/dt$ este puterea relativistă, iar $xF_y - yF_x$, etc. sunt componentele momentului forței relativiste tridimensionale $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$. Se constată ușor că $[\mathcal{M}] = ML^2T^{-2}$ și că, pentru $v \ll c$, unele componente ale lui $\mathcal{M}$ se reduc la componentele momentului forței în sens clasic. În plus, deoarece $\mathcal{F} = d\mathcal{P}/d\theta$, iar $\mathcal{U}$ este paralel cu $\mathcal{P}$, deci $\mathcal{U} \times \mathcal{P} = 0$, rezultă că:

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{K}}{d\theta} \,. \tag{6}$$

Această formulă este cunoscută ca *ecuația de variație a 4-tensorului moment cinetic*.

BIBLIOGRAFIE

[1] Anderson J., *Principes of relativity Physics*, Academic Press,1967.
[2] Bălan T., Chiriac I., *Relativity in true time*, Editura Universitaria Craiova, 2001.
[3] Callahan J., *The Geometry of Spacetime*, Springer-Verlag, 2000.
[4] Chiriac N. C., *Mărimi fizice cuadridimensionale*, Annals of the Constantin Brâncuși University of Targu Jiu-Letters & Social Sciences Series, Supplement 1/2019.
[5] Naber G., *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer-Verlag, 1992.
[6] Munteanu G., Bălan. V., *Lecții de teoria relativității*, Editura BREN, București, 2000.