Annals of the „Constantin Brâncuşi” University of Târgu Jiu, Letter and Social Science Series
Supplement 1/2020

INVARIANCE OF THE CAUSAL RELATIONSHIP AND THE RELATIVITY OF LONGITUDINAL CONTRACTION IN THE MINKOWSKI SPACE

Novac-Claudiu CHIRIAC
Lect.univ.dr.
Universitatea „Constantin Brâncuși” din Târgu Jiu

ABSTRACT: *IN THIS PAPER WE FIRST PRESENT THE INVARIANCE OF THE CAUSAL RELATIONSHIP IN A MINKOWSKI SPACE AND STATE A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR TWO EVENTS TO BE SIMULTANEOUS FOR AN OBSERVER. IN THE SECOND PART OF THE PAPER WE REFER TO THE RELATIVITY OF LONGITUDINAL CONTRACTION. WE WILL CALCULATE THE CONTRACTION FACTOR FOR THE SPATIAL SIZE OF A BODY THAT MOVES RELATIVE TO AN INERTIAL REFERENCE SYSTEM WITH A CERTAIN VELOCITY, IN THE DIRECTION OF THE VELOCITY VECTOR. FINALLY, WE PRESENT A SIGNIFICANT EXAMPLE (EINSTEIN'S WAGON CONTRACTION) FOR THE RELATIVITY OF LONGITUDINAL CONTRACTION.*

KEYWORDS: *MINKOWSI SPACE, LONGITUDINAL CONTRACTION, CONTRACTION FACTOR*

INTRODUCERE

În această lucrare vom prezenta câteva fenomene fizice care se explică firesc în cadrul Teoriei Relativității Restrânse, adică pot fi deduse logic prin studiul spațiilor Minkowski.

Vom reaminti mai întâi definiția unui spațiu Minkowski și vom defini relația de cauzalitate între două evenimente care aparțin unui astfel de spațiu.

Dacă ne raportăm la un sistem de referință inerțial, un eveniment este determinat prin patru coordonate: trei pentru poziția spațială și una pentru timp. Vom nota un eveniment printr-un sistem de patru numere reale $e = (t, x, y, z)$.

Considerăm forma pătratică
$Q(e) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

Se știe că oricărei forme pătratice i se poate atașa un produs interior, adică o funcțională $(.,.) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, prin intermediul căreia structurile matematice ale spațiului respectiv se construiesc conform unor metode tradiționale.

Acest produs interior este definit prin formula
$(e_1, e_2) = \frac{1}{4}[Q(e_1 + e_2) - Q(e_1 - e_2)]$.

Notând $e_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ și $e_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$, se obține
$(e_1, e_2) = c^2t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2$.

Numim *spațiu Minkowski* mulțimea $\mathbb{R}^4$ (ca spațiu liniar) dotată cu produsul interior între evenimentele definite anterior. Pe scurt notăm $\left(\mathbb{R}^4, (.,.)\right)$ și îl putem numi spațiul evenimentelor care se produc în $\mathbb{R}^3$.

Fie $\left(E, (.,.)\right)$ un spațiu Minkowski și Q forma pătratică atașată acestuia. Spunem despre evenimentele $e_1, e_2 \in E$ că sunt în *relație de cauzalitate* (sau *relație temporală*), mai precis e_1 este cauză pentru e_2 sau e_2 este efect al lui e_1, dacă $e_1 = e_2$ sau $t_1 < t_2$ și $Q(e_2 - e_1) > 0$. Notând *relația de cauzalitate* cu $\boldsymbol{K} \subset E \times E$, avem deci

$$\boldsymbol{K} = \left\{(e_1, e_2): e_1 = e_2 \; sau \; c(t_2 - t_1) > \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right\}$$

Relația $\boldsymbol{S} \subset E \times E$ definită prin :

$$\boldsymbol{S} = \left\{(e_1, e_2): e_1 = e_2 \; sau \; c|t_2 - t_1| < \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right\}$$

se va numi *relație spațială* sau *relație de independență cauzală*.

1. INVARIANȚA RELAȚIEI DE CAUZALITATE

Invarianța relației de cazualitate față de schimbarea sistemului de referință corespunde în practică faptului că dacă într-un reper inerțial se stabilește că între două evenimente e_1 și e_2 se poate transmite un mesaj, atunci orice observator inerțial admite această posibilitate. Mai mult, așa cum se va vedea în demonstrația propoziției următoare, ordinea în timp a evenimentelor ce sunt în relație de cauzalitate se menține prin trecerea de la un sistem de referință la altul.

Propoziția 1. Dacă L este o transformare Lorentz oarecare, atunci vom avea $(e_1, e_2) \in \boldsymbol{K}$ dacă și numai dacă $(Le_1, Le_2) \in \boldsymbol{K}$.

Demonstrație. Să notăm $e_i = (t_i, \bar{r}_i)$ și $Le_i = (t_i', \bar{r}_i')$, cu $i = 1,2$. Cazul $e_1 = e_2$ este banal, deci să considerăm că $(e_1, e_2) \in \boldsymbol{K}$ deoarece $c(t_2 - t_1) > \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|$. Evident, de aici rezultă $Q(e_2 - e_1) > 0$, deci, conform invarianței formei pătratice Q, avem și $Q\big(L(e_2 - e_1)\big) > 0$. Folosind și liniaritatea transformării Lorentz, obținem $Q(Le_2 - Le_1) > 0$, adică:

$$c^2(t_2' - t_1')^2 > \|\bar{r}_2' - \bar{r}_1'\|^2. \tag{1}$$

Propoziția ar fi demonstrată dacă am dovedi că $t_2' > t_1'$, astfel încât prin extragerea radicalului, din (1) să obținem

$$c(t_2' - t_1') > \|\bar{r}_2' - \bar{r}_1'\|. \tag{2}$$

Pentru a dovedi că $t_2' > t_1'$ folosim expresia timpului în transformarea Lorentz în forma vectorială și obținem

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= (1 - v^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}}[(t_2 - t_1) - c^{-2}\langle\bar{v}, \bar{r}_2 - \bar{r}_1\rangle] = \\ &= (t_2 - t_1)(1 - v^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}}\left[1 - c^{-2}\langle\bar{v}, \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{t_2 - t_1}\rangle\right]. \end{aligned}$$

Deoarece $(e_1, e_2) \in \boldsymbol{K}$**,** avem $\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\| \cdot |t_2 - t_1|^{-1} < c$, deci

$$\begin{aligned} c^{-2}\langle\bar{v}, (t_2 - t_1)^{-1}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\rangle &\le c^{-2}|\langle\bar{v}, (t_2 - t_1)^{-1}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\rangle| \le c^{-2}v|t_2 - t_1|^{-1}\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\| \\ &< c^{-1}v < 1\,. \end{aligned}$$

Rezultă astfel că $sign(t_2' - t_1') = sign(t_2 - t_1) = +1$, deci într-adevăr are loc relația (2). ■

Invarianța relației spațiale $\boldsymbol{S}$ se dovedește în mod asemănător recurgând la invariantul fundamental Q. Dacă $(e_1, e_2) \in \boldsymbol{S}$, ordinea în timp nu se mai păstrează.

De asemenea, dacă în formulele care dau transformarea Lorentz (sau, în particular, în formulele Lorentz speciale) considerăm $t = 0$, nu rezultă $t' = 0$, deci evenimentele simultane pentru un observator inițial nu sunt simultane și pentru ceilalți observatori inerțiali. Propoziția următoare stabilește legătura între simultaneitate și ortogonalitate.

Propoziție. O condiție necesară și suficientă ca două evenimente e_1 și e_2 să fie simultane pentru un observator ω este ca

$$(e_1 - e_2) \perp \omega \tag{3}$$

Demonstrație. Fie $e_1 = (t_1, \bar{r}_1)$ și $e_2 = (t_2, \bar{r}_2)$ cele două evenimente din spațiul Minkowski $\mathbb{R}^4$ și $\omega = \{\lambda(1, \bar{v}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ un observator inițial. Vom arăta că cele două condiții din enunț se exprimă prin aceeași ecuație. Într-adevăr, pentru observatorul ω evenimentele e_1 și e_2 apar cu alte coordonate, anume $e_1 = (t_1', \bar{r}_1')$ și $e_2 = (t_2', \bar{r}_2')$, unde, conform formulelor lui Lorentz în formă vectorială,

$$t_i' = (1 - v^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}}(t_i - c^{-2}\langle \bar{v}, \bar{r}_i \rangle), \quad i = 1,2.$$

Simultaneitatea acestor evenimente pentru observatorul ω, adică egalitatea $t_1' = t_2'$, se scrie deci prin condiția

$$t_1 - c^{-2}\langle \bar{v}, \bar{r}_1 \rangle = t_2 - c^{-2}\langle \bar{v}, \bar{r}_2 \rangle \tag{4}$$

Pe de altă parte, condiția (3) se scrie sub forma

$$\big((t_1 - t_2, \bar{r}_1 - \bar{r}_2), (1, \bar{v})\big) = 0\,,$$

care, având în vedere forma produsului interior pe spațiul Minkowski, se reduce tot la condiția (4).

2. RELATIVITATEA CONTRACȚIEI LONGITUDINALE

Contracția longitudinală este un efect relativist fundamental. Din analiza experienței lui Michelson și Morley putem reține că brațul longitudinal al interferometrului, cel așezat pe direcția de mișcare a Pământului, apare contractat cu factorul $(1 - v^2c^{-2})^{\frac{1}{2}}$ pentru observatorul exterior, fix față de Pământ. Înainte de a arăta că o asemenea contracție apare pentru orice segment așezat de-a lungul vectorului vitezei relative a celor două repere inerțiale, vom analiza mecanismul măsurării lungimii unui segment dintr-un sistem de referință exterior aceluia în care se află segmentul. Este evident că într-un sistem de referință (inerțial) oarecare nu putem obține informații asupra lungimii unui segment din spațiu, decât prin intermediu semnalelor luminoase care transmit informații din capetele segmentului. Admitem deci că observatorul respectiv poate recepționa evenimente ce se petrec în capetele segmentului; mai precis, aceasta înseamnă că observatorul poate stabili coordonatele temporale și spațiale ele evenimentelor respective. Lungimea segmentului măsurat, aparentă observatorului respectiv, este dedusă de acesta din coordonatele spațiale determinate de el. Este clar că, dacă observatorul nu este în repaus față de segment, nu pot fi luate în calcul evenimente arbitrare ce se petrec în capetele segmentului.

Propoziția 2. Dacă un corp se mișcă față de un sistem de referință inerțial, ω, cu o viteză $\bar{v}$, atunci dimensiunea sa spațială, în direcția vectorului $\bar{v}$, se contractă cu factorul

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,,$$

numit factorul de contracție Lorentz-Fitzgerald.

Demonstrație. Putem considera corpul de forma unei bare de lungime l, ce se mișcă pe axa Ox a sistemului ω, fiind așezată de-a lungul acesteia.

Fie $e_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ și $e_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ două evenimente ce au loc la capetele barei, simultane pentru ω. Coordonatele acestor evenimente pentru sistemul ω sunt date de formulele Lorentz speciale:

$$\begin{cases} x_i' = \dfrac{x_i - vt_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y_i' = y_i \\ z_i' = z_i \\ t_i' = \dfrac{t_i - \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad i = 1,2 \tag{5}$$

Astfel că lungimea aparentă a barei în sistemul ω va fi:

$$l' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

unde $l = x_2 - x_1$ este lungimea barei în sistemul legat de ea (în care ea este în repaus).
Scriind cu ajutorul ultimei formule din (5) că $t_1' = t_2'$, găsim

$$t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} l = 0$$

astfel că revenind la expresia lui l' obținem

$$l' = \frac{l - \frac{v^2}{c^2} l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{6}$$

Ceea ce dovedește apariția contracției longitudinale.

■

Cum nu există un sistem de referință în repaus absolut, efectul de contracție longitudinală prezintă o reciprocitate în cazul perechii de observatori inerțiali considerați. Cu alte cuvinte, dacă doi observatori, ω și Ω, se mișcă unul față de celălalt cu o viteză v și dacă fiecare are așezată de-a lungul direcției mișcării lor relative câte o bară de lungime l, fiecare va observa bara din celălalt sistem contractată cu factorul Lorentz-Fitzgerald. Acest fapt corespunde în calcule (în spațiul de evenimente) cu aceea că dacă se înlocuiește $\bar{v}$ cu $-\bar{v}$ în propoziția 2, concluzia nu se schimbă. Într-adevăr, dacă în (5) înlocuim $\bar{v}$ cu $-\bar{v}$, deci considerăm transformarea Lorentz inversă, obținem

$$l' = \frac{x_2 + vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 + vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l + v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Scriind acum că $t_2' = -t_1'$ se obține

$$t_1 - t_2 + \frac{v}{c^2} l = 0,$$

ceea ce conduce la același rezultat ca în demonstrația inițială.

Din punct de vedere practic lucrurile se petrec ca în exemplul următor

Exemplu (contracția vagonului lui Einstein). Să interpretăm cei doi observatori inițiali ca fiind:
$\Omega =$ o linie de cale ferată rectilinie la suprafața Pământului
$\omega =$ vagonul lui Einstein, executând o mișcare uniformă pe această linie, cu o viteză comparabilă cu c.

Pentru simplitate considerăm că în repaus vagonul are lungimea $l = 10\ m$, lungime ce o confirmă observatorul ω din vagon indiferent de mișcarea acestuia pe linie, iar lângă linie sunt plantate borne tot la distanța de $10\ m$, lungime stabilită de observatorul Ω de pe Pământ. Astfel, când vagonul este în repaus, cei doi observatori constată coincidența lungimii vagonului cu distanța dintre borne.

Să considerăm acum că vagonul se mișcă cu viteza $v = 180000\ km/s$ față de linie. În acest caz factorul de contracție este

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}8\,.$$

Observatorul Ω va vedea vagonul de lungime $0{,}8 * 10 = 8\ m$, în timp ce observatorul ω, din vagon, va constata că bornele s-au apropiat la distanța de $8\,m$. Desigur, pentru ω lungimea vagonului este mereu $10\ m$, iar pentru Ω distanța dintre borne rămâne de $10\ m$.

Menționăm că prin expresia “observatorul… vede … “ înțelegem tocmai faptul că el recepționează ca simultane două semnale emise din capetele segmentului, exact ca atunci când se fotografiază.

Concluzii

Analizând problema contracției longitudinale am folosit expresii de forma “observatorul ... vede ...”, “lungimea ... îi apare observatorului ...”, de unde s-ar putea trage concluzia că este vorba numai de aparențe; atunci se poate pune întrebarea care este lungimea reală?

Analizând lucrurile în profunzime constatăm că o asemenea întrebare nu are sens. În primul rând aceste aparențe sunt obiective, adică nu poartă urma vreunui subiectivism; în loc de “vede” putem considera “fotografiază” sau “înregistrează’. Apoi, este normal ca o aceeași realitate să apară diferit pentru observatori diferiți; toți vor afirma că văd realitatea, deși fiecare vede altceva. Neavând criterii pentru a alege un anume observator ca privilegiat în a vedea realitatea, este clar că întrebarea formulată nu are sens și că în loc de lungime reală și lungime aparentă este mult mai corect să vorbim despre *lungime în repaus* și *lungime relativă*. Chiar dacă lungimea de repaus are particularitatea de a fi măsurată din reperul legat rigid de corpul măsurat, lungimile relative, măsurate de ceilalți observatori inerțiali sunt realități tot atât de obiective ca și prima.

BIBLIOGRAFIE

1. Bălan T. (1992). Generalizing the Minkowskian Spacetime I, II. *Stud. Cerc. Mat.*, Tom 44, Nr. 2, p. 89-107, Nr. 4, p. 267-284.
2. Chiriac N.C. (2017). Metrics and Norms in Minkowski Space, *Annals of the "Constantin Brâncuși" University, Letter and Social Science Series*, No. 3/2017.
3. Einstein A. (1957). *Teoria Relativității*. Editura Tehnică, București.
4. Munteanu G., Bălan. V. (2000). *Lecții de teoria relativității*, Editura BREN, București,.
5. Naber G. (1992). *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer-Verlag. Berlin.
6. Zeeman E.C. (1967). The topology of Minkowski space. *Topology*,. vol. 6 (1967), p. 161-170.